Vorlesung 1 (19.10.16)

Technisches zur Vorlesung

Termine: Mi und Fr 9:45 – 11:15 Vorlesung; Fr 11:30 – 13:00 Übung.
Alles in Raum 8.143

Leistungspunkte: 9 (Übungen Pflicht dafür)

Zuordnung: Bachelor-Vertiefung / Master / Lehramt-Wahl

Zu mir: Ulrich Thiel
Büro: 8.149 (momentan leider Baustelle; daher in Allmandring 30, 0.018 (> 1km Fussweg ...); Sprechstunde deswegen nach der Vorlesung oder nach Vereinbarung)
Email: thiel@mathematik.uni-stuttgart.de

Website:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/~thiel/teaching/komalg-ws16

* Notizen zur Vorlesung
* Übungsblätter
* Diskussionsforum zur Vorlesung

Literatur: Atiyah-Macdonald, Eisenbud (siehe Website)

Inhalt heute: Überblick, Wiederholung: Ringe, Algebren, Morphismen, Einheiten, Produkte

Überblick:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Ringe} \arrow[r, shift left] & \text{Moduln} \arrow[l, shift left] \\
\text{algebraische Geometrie} \arrow[r, shift left] & \text{kommutative Ringe} \arrow[l, shift left] \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

Grothendieck: Geometrische Sichtweise eines kommutativen Rings (Primspektrum als geringter Raum (vgl. Mannigfaltigkeit))

Viele algebraische Konstruktionen haben daher geometrische Begriffe (aber auch andersrum!)

Ziele:
* Grundlagen dieser geometrischen Sichtweise (Primspektrum)
* Lokalisierung
* Ganzheit
* Dimensionstheorie
* Primärzerlegung

Anwendungen
* algebraische Geometrie
* algebraische Zahlentheorie
* Computeralgebra
* Darstellungstheorie
* ...

1. Wiederholung: Ringe

1.1. Ringe und Morphismen

Def[1]: Ein Ring (assoziativ, mit 1) ist eine Menge A (lat annulus, frz. anneau) mit zwei Operationen

$$+ : A \times A \to A \quad \text{(Addition)}$$
$$\cdot : A \times A \to A \quad \text{(Multiplikation)}$$

sodass gilt:

* $(A,+)$ ist abelsche Gruppe
* $(A,\cdot)$ ist Monoid, d.h. assoziativ mit Einheit 1
* Distributivgesetz:

$$a\cdot(b+c) = ab + ac$$
$$\text{und} \quad (a+b)\cdot c = ac + bc \qquad \forall a,b,c \in R$$

Def[2]: Ein Ringmorphismus (von assoz. Ringen mit 1) ist eine Abbildung $f: A \to B$ zwischen Ringen, sodass

* $f : (A,+) \to (B,+)$ ist Gruppenmorphismus, d.h. $f(a+b) = f(a) + f(b)$ $\forall a,b$
  $\Rightarrow f(-a) = -f(a) \Rightarrow f(0) = 0$
* $f : (A,\cdot) \to (B,\cdot)$ ist Monoidmorphismus, d.h. $f(ab) = f(a)f(b)$ $\forall a,b$
* $f(1) = \underline{1}$ (!)

Klar: $f: A \to B$ und $g: B \to C$ Ringmorphismen $\Rightarrow g \circ f : A \to C$ Ringmorphismus

Def[3]: A heißt kommutativ, falls $ab = ba$ $\forall a,b \in A$ (d.h. $(A,\cdot)$ ist kommutatives Monoid)

IN DIESER VORLESUNG SIND ALLE RINGE KOMMUTATIV (und assoz mit 1)

Def[4]: $f: A \to B$ ist ein Isomorphismus, falls ein Ringmorphismus $g: B \to A$ existiert mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$.

Lemma[5] $f: A \to B$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn f bijektiv ist

Beweis f Iso $\Rightarrow$ Besitzt Umkehrabbildung $\Rightarrow$ ist bijektiv.
f bijektiv $\Rightarrow$ Besitzt (eindeutige) Umkehrabbildung f^{-1}.

Behauptung: f^{-1} ist Ringmorphismus.
Da f Ringmorphismus, gilt

$$f(f^{-1}(b) + f^{-1}(b')) = f(f^{-1}(b)) + f(f^{-1}(b')) = b + b'$$

Anwenden von f^{-1} liefert $f^{-1}(b) + f^{-1}(b') = f^{-1}(b+b')$.
Analog $f^{-1}(bb') = f^{-1}(b) f^{-1}(b')$.
Weiterhin folgt aus $f(1) = 1$ sofort $1 = f^{-1}(1)$ $\square$

1.2. Einheiten

Unterschied zwischen $(A,+)$ und $(A,\cdot)$ ist, dass $(A,\cdot)$ nicht notwendig Inverse zu jedem Element besitz!

Def[1]: Eine Einheit von A ist ein invertierbares Element a des Monoids $(A,\cdot)$, d.h. es $\exists b \in A$ mit $ab = 1$.
In diesem Fall ist b eindeutig und wir schreiben a^{-1} dafür.

Definiere $A^\times := \{ a \in A \mid a \text{ ist Einheit} \}$. Das ist eine Untergruppe des Monoids $(A,\cdot)$; genannt Einheitengruppe.

Bem[2]: Im nicht-kommutativen Fall verlangt man Links- und Rechtsinverses (die bei Existenz automatisch übereinstimmen)!

Def[3]: Gilt $A^\times = A \setminus \{0\}$, so heißt A Körper.

1.3. Unterringe

Def[1]: Ein Unterring eines Rings B ist eine Teilmenge A, sodass:
* A abgeschlossen unter $+$ und $-$ ($\Leftrightarrow (A,+)$ Untergruppe von $(B,+)$) $\Rightarrow 0 \in A$)
* A abgeschlossen unter $\cdot$ und $1 \in A$ ($\Leftrightarrow (A,\cdot)$ Untermonoid von $(B,\cdot)$)

In dem Fall ist A mit der Einschränkung von $+$ und $\cdot$ ebenfalls ein Ring und die Einbettung $A \to B$ ist ein injektiver Ringmorphismus.

Lemma[2] Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus, so ist $\operatorname{Im} f := f(A)$ (image) ein Unterring von B.

Beweis: $b, b' \in \operatorname{Im} f \Rightarrow b = f(a), b' = f(a')$ für gewisse $a, a' \in A$.
Daher $b + b' = f(a) + f(a') = f(a + a') \in \operatorname{Im} f$, $b \cdot b' = f(a) \cdot f(a') = f(aa') \in \operatorname{Im} f$.
Weiterhin $1 = f(1) \in \operatorname{Im} f$. $\square$

1.4 Algebren

Relative Sichtweise von Ringen, Morphismen "vertikal"

Def[1]: Eine Algebra über einem kommutativen Ring R (auch R-Algebra) ist ein Ring A zusammen mit einem Ringmorphismus $\varphi: R \to A$. Man nennt φ auch den Strukturmorphismus von A.

Dies liefert eine Skalaroperation von R auf A durch

$$ra := \varphi(r)a \qquad \text{(Unterdrücken } \varphi \text{ in dieser Schreibweise)}$$

Diese ist mit der Addition und Multiplikation kompatibel:

$$\begin{aligned} r(a+b) &= ra + rb \\ (r+s)a &= ra + sa \\ (rs)a &= r(sa) \\ r(ab) &= (ra)b = a(rb) \end{aligned}$$

Andererseits liefert eine R-Operation auf A, die obige Eigenschaften erfüllen, einen Ringmorphismus $\varphi: R \to A$, $r \mapsto r \cdot 1$.
(Beide Konzepte, also Strukturmorphismus und Skalaroperation, sind äquivalent)

__Def__[2]: Ein Morphismus von R-Algebren $\varphi: R \to A$ und $\psi: R \to B$ ist ein Ringmorphismus $f: A \to B$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & R \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h.

$$f \circ \varphi = \psi \iff f(ra) = r f(a) \quad \forall r \in R, a \in A$$

__Also:__[3] "Algebra" anstatt "Ring" heißt einfach nur, dass alles noch zusätzlich mit einer Skalaroperation eines Rings kompatibel sein soll.

__Bsp__[4]: Jeder Ring A ist kanonisch eine $\mathbb{Z}$-Algebra durch

$$\varphi: \mathbb{Z} \to A, \quad n \mapsto n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}$$

Algebren verallgemeinern also Ringe.

<u>Def</u>[5]: Eine Unteralgebra einer R-Algebra A ist ein unter der R-Operation stabiler Unterring von A $\Rightarrow$ ist dann kanonisch R-Algebra.
(Im Prinzip kann man alle Begriffe/Konstruktionen für Ringe auf die "offensichtliche" Weise auf Algebren verallgemeinern).

1.5 Beispiele

1↓

* $A = \{0\}$ ist ein Ring mit $0 = 1$ (Nullring).
* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_{p^n}$ Körper
* $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zyklische Gruppe der Ordnung 2.
  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ist Unterring
* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = ?$ (Übung)
* $R[X]$ Polynomring in einer Variablen über einem kommutativen Ring R.
  Dies ist eine R-Algebra: $R \to R[X]$, $r \mapsto r \cdot X^0$ (konstantes Polynom)
  Frage: $R[X]^\times = ?$ (Übung)
* Allgemeiner: $R[X_1, \dots, X_n]$ Polynomring in mehreren Variablen, also

$$R[X_1, \dots, X_n] = \left\{ \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} r_\mu X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} \;\middle|\; r_\mu \in R, \text{ alle bis auf endlich viele} = 0 \right\}$$

mit der "offensichtlichen" Addition und Multiplikation. Ist eine R-Algebra.
Das ist das wichtigste Beispiel in dieser Vorlesung! Mehr in der Übung!!

<u>Bsp</u>[2]: Sei X eine Menge und R ein kommutativer Ring. Dann ist die Menge $\mathrm{Maps}(X, R)$ der Abbildungen $X \to R$ mit punktweiser Addition und Multiplikation ein (kommutativer) Ring:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) := f(x)\,g(x)$$

($1 \in \mathrm{Maps}(X,R)$ ist die konstante Funktion $1(x) = 1$ $\forall x$)

Dies ist eine R-Algebra mittels $(rf)(x) = r f(x)$.

<u>Bsp</u>[3]: X ein topologischer Raum, dann ist die Menge $C(X,\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathrm{Maps}(X,\mathbb{R})$.

<u>Bsp</u>[4]: X ein topologischer Raum. Sei $C_0(X,\mathbb{R})$ die Menge stetiger Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger, d.h. $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ist kompakt in X. Das ist ein Unterring von $C(X,\mathbb{R})$ genau dann, wenn X kompakt ist, denn der Träger der Einheit $\underline{1}$ ist gleich X.
$\Rightarrow$ z.B ist $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kein Unterring von $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1.6 Produkte

<u>Lemma</u>[1]: Sei $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine nicht leere Familie von Ringen. Dann ist auch das direkte Produkt

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \{(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid b_\lambda \in B_\lambda \ \forall \lambda\}$$

ein Ring mit komponentenweiser Addition und Multiplikation:

$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (b_\lambda + b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cdot (b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (b_\lambda \cdot b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$$(\underline{1} = (1_{B_\lambda})_{\lambda\in\Lambda})$$

□

Insbesondere ist $B^n = \prod_{i=1}^n B$ ein Ring für jeden Ring B.

<u>Klar</u>[2]: Die Projektion $pr_\lambda : \prod_\lambda B_\lambda \to B_\lambda$ ist ein Ringmorphismus.

<u>Achtung</u>[3]: Die Einbettung $\iota_\lambda : B_\lambda \to \prod B_\lambda$ ist <u>kein</u> Ringmorphismus, wenn $|\Lambda| \geq 2$.