1.6

Vorlesung 2 (21.10.16)

Letztes Mal: Das direkte Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ von Ringen.

Lemma[4] (Universelle Eigenschaft des Produkts). Ist A ein Ring und für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein Ringmorphismus $f_\lambda : A \to B_\lambda$ gegeben, so gibt es einen eindeutigen Morphismus

$$f : A \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda ,$$

sodass

$$pr_\lambda \circ f = f_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda ,$$

dh das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \arrow[d, "pr_\lambda"] \\ & B_\lambda \end{tikzcd}$$

ist kommutativ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Beweis: Definiere f durch $f(a) = (f_\lambda(a))_{\lambda \in \Lambda}$. Das ist ein Ringmorphismus, der $pr_\lambda \circ f = f_\lambda$ erfüllt. Andererseits impliziert diese Bedingung sofort, dass f so aussehen muss. □

Bemerkung[5]: Ist $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine unendliche Familie, so ist die direkte Summe

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \{ (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid b_\lambda = 0 \text{ für fast alle } \lambda, \text{ dh. alle bis auf endlich viele} \}$$

kein Unterring von $\prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, da $1 \notin \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$. Es existieren also keine unendlichen direkten Summen für Ringe!

1.7 Ideale

Def[1]: Ein Ideal eines Rings A ist eine Teilmenge $I \subseteq A$, sodass

* I abgeschlossen unter $+$ und $-$ ($\Leftrightarrow (I,+)$ Untergruppe von $(A,+) \Rightarrow 0 \in I$)
* I abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen aus A, d.h.

$$a x \in I \quad \forall a \in A, x \in I \quad (\Leftrightarrow AI \subseteq I)$$

Man schreibt dann auch $I \trianglelefteq A$.

Bemerkung[2]: Bei nicht-kommutativen Ringen unterscheidet man zwischen links-, rechts- und zweiseitigen Idealen. Das stimmt bei kommutativen Ringen alles überein.

Bsp[3]: $\{0\}$ und A sind Ideale in A für jeden Ring A.

Lemma[4]: Ist $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine nicht leere Familie von Idealen in A, so ist auch

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

ein Ideal in A. □

Korollar[5]: Sei X eine Teilmenge von A. Dann gibt es ein eindeutiges minimales X enthaltendes Ideal. Nennen dies das von X erzeugte Ideal und schreiben dafür $\langle X \rangle$ oder (X). Nennen X auch Erzeugendensystem.

Beweis: Sei S die Menge aller X enthaltenden Ideale. Es gilt $S \neq \emptyset$, da $A \in S$. Nun ist

$$(X) := \bigcap_{I \in S} I$$

ein X enthaltendes Ideal. Minimalität und Eindeutigkeit klar. □

<u>Lemma:</u>[6] Es gilt
$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; x_i \in X, a_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

<u>Beweis:</u>
Da $X \subseteq (X)$ und (X) Ideal, also abgeschlossen unter $+$ und Multiplikation mit A, muss (X) die Elemente $\sum a_i x_i$ enthalten. Andererseits bilden diese Elemente ein X enthaltendes Ideal, muss also gleich (X) sein. $\square$

<u>Bemerkung:</u>[7] Jedes Ideal I hat ein Erzeugendensystem, denn $I = (I)$. Aber Achtung: Ein <u>minimales</u> Erzeugendensystem muss nicht notwendig existieren (Beispiel später).

<u>Bemerkung:</u>[8] Für Erzeugendensystem sagt man auch Basis. Ich finde den Begriff nicht gut, denn Darstellung ist nicht eindeutig, z.B. $I = (X, Y)$ in $K[X, Y]$ und $f = XY \in I$.

<u>Lemma</u>[9] Ist $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine nicht leere Familie von Idealen, so ist auch
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda := \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda \;\middle|\; \Lambda' \subseteq \Lambda \text{ endlich}, a_\lambda \in I_\lambda \right\}$$
ein Ideal und es gilt
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \Big)$$
das von $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ erzeugte Ideal $\square$

<u>Bem:</u>[10] Die Vereinigung von Idealen ist nicht notwendig ein Ideal, z.B. $(2), (3) \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Es gilt $2, 3 \in (2) \cup (3) = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, aber $3 - 2 = 1 \notin (2) \cup (3)$.

Bem:[11] Haben zwei Operationen auf der Menge der Ideale:

* $\bigcap I_\lambda$: größtes in allen I_λ enthaltendes Ideal (Supremum)
* $\sum I_\lambda$: kleinstes alle I_λ enthaltendes Ideal (Infimum)

Haben eine weitere Operation:

Def:[12] Das Produkt IJ zweier Ideale $I, J \trianglelefteq A$ ist das durch die Elemente xy, $x \in I, y \in J$ erzeugte Ideal.

Insbesondere ist dadurch I^n für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Klar:[13] Es gilt $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I + J$

Bsp:[14]

* $(1) = A$, d.h. sobald ein Ideal 1 enthält, ist es bereits gleich A.
* Die einzigen Ideale in einem Körper sind 0 und K.
* In $\mathbb{Z}$ gilt $(n) = n\mathbb{Z} = \{nk; k \in \mathbb{Z}\}$.

Bem:[15] Ideale verallgemeinern Teilbarkeit. Für $a, b \in A$ schreiben wir

$$a \mid b \quad \text{falls es } c \in A \text{ gibt mit } ac = b$$
$$\iff (a) \subseteq (b)$$

1.8 Hauptidealringe

Def:[1] Ein Ideal der Form (a) heißt Hauptideal. Ein Hauptidealring ist ein Ring, in dem jedes Ideal Hauptideal ist.

Bsp[2]:

* Jeder euklidische Ring (Ringe mit "Division mit Rest").
  z.B. $\mathbb{Z}$, $K[X]$ Polynomring in einer Variablen über einem Körper
* Polynomringe in mehreren Variablen sind keine Hauptidealringe:
  Das Ideal $(X_1, \dots, X_n) \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ ist kein Hauptideal.

In einem Hauptidealring kann man ggT und kgV definieren:

$$(a) + (b) = (\operatorname{ggT}(a,b))$$

$$(a) \cap (b) = (\operatorname{kgV}(a,b))$$

(bis auf Multiplikation mit Einheit eindeutig)

Def[3]: Für einen beliebigen Ring A und Ideale $I, J \trianglelefteq A$ sagen wir, dass I und J koprim sind, falls $I + J = (1)$.

1.9 Quotienten

Wozu Ideale? Sie sind analog zu Normalteilern in Gruppen.

Lemma[1] Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus, so ist

$$\operatorname{Ker} f := \{a \in A \mid f(a) = 0\}$$

ein Ideal in A. Die Abbildung f ist injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Ker} f = 0$.

Beweis $a, b \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) = 0 \Rightarrow a+b \in \operatorname{Ker} f$

$a \in A,\ b \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(ab) = f(a) f(b) = 0 \Rightarrow ab \in \operatorname{Ker} f$.

Injektivität: $f(a) = f(b) \Rightarrow 0 = f(a) - f(b) = f(a-b) \Rightarrow a - b \in \operatorname{Ker} f$
Ist also $\operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow f$ injektiv. Umkehrung klar. $\square$

Lemma[2]: Ist I ein Ideal in A, so induziert die Multiplikation auf der additiven Quotientengruppe A/I eine wohldefinierte Ringstruktur,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b},$$

und die Quotienabbildung $q: A \to A/I$ ist ein surjektiver Ringmorphismus mit $\operatorname{Ker} q = I$. ($\Rightarrow$ Ideale in A sind genau die Kerne von Ringmorphismen $A \to B$ mit B beliebig).

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Lemma[3] Der Quotient A/I erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus mit $I \subseteq \operatorname{Ker} f$, so gibt es genau einen Ringmorphismus

$$\bar{f}: A/I \to B,$$

sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & B \\
A/I \arrow[ur, dashed, "\exists ! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h.

$$f = \bar{f} q \quad (\text{"}f \text{ faktorisiert durch } q\text{"})$$

Beweis: Es muss $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$ gelten. $\Rightarrow$ Eindeutigkeit.
$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow a - b \in I \subseteq \operatorname{Ker} f \Rightarrow 0 = f(a-b) = f(a) - f(b) \Rightarrow f(a) = f(b)$.
Bleibt zu zeigen, dass $\bar{f}$ Ringmorphismus.

$$\bar{f}(\bar{a}\bar{b}) = \bar{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(\bar{a})\,\bar{f}(\bar{b})$$

Analog $\bar{f}(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{f}(\bar{a}) + \bar{f}(\bar{b})$, $\bar{f}(\bar{1}) = \bar{1}$. $\square$

<u>Lemma</u>[4] (Isomorphiesatz) Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus, so induziert f einen Ringisomorphismus

$$A/\ker f \simeq \operatorname{Im} f$$
$$\bar{a} \mapsto f(a)$$

<u>Beweis:</u> Übungsaufgabe $\square$

1.10 Ideale unter Morphismen

<u>Bem</u>[1]: Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus und $I \trianglelefteq A$ ein Ideal, so ist $f(I) \subseteq B$ nicht notwendig ein Ideal. Betrachte z.B die Einbettung

$$f: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

Es ist $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$, aber $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ist kein Ideal, denn $(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

Es gilt aber:

<u>Lemma</u>[2]: Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus und $J \trianglelefteq B$ ein Ideal, so ist auch $f^{-1}(J) \subseteq A$ ein Ideal.

<u>Beweis:</u> $a, a' \in f^{-1}(J) \Rightarrow \exists b, b' \in J$ mit $f(a) = b$, $f(a') = b'$.
$\Rightarrow f(a+a') = b + b' \in J \Rightarrow a + a' \in f^{-1}(J)$
Analog $a \in A$, $a' \in f^{-1}(J) \Rightarrow a' = f(b')$ für ein $b' \in J$
$\Rightarrow f(a a') = f(a) b' \in J \Rightarrow a a' \in f^{-1}(J)$ $\square$

Korollar[3] Ein Ringmorphismus $f : A \to B$ induziert eine inklusionserhaltende Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ideals}(B) &\longrightarrow \mathrm{Ideals}(A) \\ J &\longmapsto f^{-1}(J). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{Ideals}(B) \\ \downarrow \\ \mathrm{Ideals}(A) \end{array}$$

Beweis: Klar. $\square$

Korollar[4] Ist A ein Unterring von B und $J \trianglelefteq B$ ein Ideal, so ist auch $A \cap J \trianglelefteq A$ ein Ideal.

Beweis: Sei $f : A \hookrightarrow B$ die Inklusion. Es ist $f^{-1}(J) = A \cap J$. $\square$

Lemma[5]: Ist $f : A \twoheadrightarrow B$ ein <u>surjektiver</u> Ringmorphismus, so ist $f(I)$ ein Ideal in B für jedes Ideal $I \trianglelefteq A$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{Ideals}(B) &\simeq \{ I \trianglelefteq A \mid \mathrm{Ker} f \subseteq I \} \\ J &\mapsto f^{-1}(J). \\ f(I) &\leftarrow I \end{aligned}$$

Darüber hinaus induziert f für $J \trianglelefteq B$ ein Isomorphismus

$$A/f^{-1}(J) \simeq B/J$$

Beweis:
Sei $J \trianglelefteq B$. Es ist $\{0\} \subseteq J$, daher $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(J)$, d.h. $f^{-1}(J) \in \{ I \trianglelefteq A \mid \mathrm{Ker} f \subseteq I \}$.
Beh: $I \trianglelefteq A \Rightarrow f(I) \trianglelefteq B$.
Bew: $a, a' \in A \Rightarrow f(a) + f(a') = f(a + a') \in f(I)$, $-f(a) = f(-a) \in f(I)$
Sei $b \in f(I)$ und $b' \in B$. Sei $a \in A$ mit $f(a) = b$. Da f surjektiv, gibt es auch $a' \in A$ mit $f(a') = b'$! Also $b'b = f(a') f(a) = f(a'a) \in f(I)$.

Daher ist $I \mapsto f(I)$ eine Abbildung $\mathrm{Ideals}(A) \to \mathrm{Ideals}(B)$.

Da f surjektiv gilt $f(f^{-1}(J)) = J$

Beh: Für $I \trianglelefteq A$ gilt $f^{-1}(f(I)) = I + \operatorname{Ker} f$

Bew: $f(I + \operatorname{Ker} f) = f(I) \Rightarrow I + \operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(f(I))$

Sei andererseits $x \in f^{-1}(f(I)) \Rightarrow f(x) \in f(I) \Rightarrow f(x) = f(y)$ für ein $y \in I$

$\Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x \in y + \operatorname{Ker} f \subseteq I + \operatorname{Ker} f$.

Ist nun $\operatorname{Ker} f \subseteq I \Rightarrow I + \operatorname{Ker} f = I \Rightarrow f^{-1}(f(I)) = I$.

Isomorphismus: f induziert $A \to B \to B/J$, surjektiv mit Kern $f^{-1}(J)$.

<u>Korollar</u> Ist $I \trianglelefteq A$, so ist $\mathrm{Ideals}(A/I) \simeq \{ J \trianglelefteq A \mid I \subseteq J \}$. $\square$

<u>Bem</u> Obwohl $f(I)$ im Allgemeinen kein Ideal ist, kann man natürlich das durch $f(I)$ erzeugte Ideal betrachten und so eine Korrespondenz zwischen (Teilmengen von) $\mathrm{Ideals}(A)$ und $\mathrm{Ideals}(B)$ konstruieren.