Vorlesung 3 (26.10.16)

1.11 Nilpotente Elemente: Siehe Übung 1.5

1.12 Annihilatoren und Nullteiler

Def:[1] Sei A ein Ring. Der Annihilator einer Teilmenge $S \subseteq A$ ist

$$\mathrm{Ann}(S) = \mathrm{Ann}_A(S) = \{a \in A \mid as = 0 \ \forall s \in S\}.$$

Für $x \in A$ schreiben wir

$$\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(\{x\}) = \{a \in A \mid ax = 0\}.$$

Lemma[2]

a) $\mathrm{Ann}(S)$ ist ein Ideal in A

(b) $\mathrm{Ann}(S) = \mathrm{Ann}((S))$ ← das von S erzeugte Ideal

Beweis: Klar. □

Def:[3] Ein Element $x \in A$ heißt Nullteiler, falls $\mathrm{Ann}_A(x) \neq 0$, d.h. es existiert $0 \neq a \in A$ mit $ax = 0$ ($\Leftrightarrow \mu_x : A \to A$, $a \mapsto ax$ ist nicht injektiv.)

Ein Nicht-Nullteiler ist also ein Element $x \in A$ mit $\mathrm{Ann}(x) = 0$, d.h. $ax = 0 \Rightarrow a = 0$.

Bem:[4] $0 \in A$ ist Nullteiler $\Leftrightarrow A \neq 0$

Def.[5] Ein Integritätsring ist ein Ring, der keine Nullteiler außer 0 besitzt.

Def.[6] Ein Bereich ist ein vom Nullring verschiedener Ring.

Bsp.[7]
* Jeder Körper ist Integritätsbereich, $\mathbb{Z}$ ist einer
* Der Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ ist ein Integritätsbereich genau dann, wenn R einer ist (Übung)
* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist Integritätsbereich genau dann, wenn n Primzahl ist.
* Jeder Unterring eines Integritätsbereichs ist ein Integritätsbereich.

2. Primspektrum

2.1. Primideale

Erinnerung[1]: Ein Primelement eines Rings A ist eine Element $p \in A$, sodass
* p ist Nicht-Nullteiler
* p ist Nicht-Einheit
* $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$ $\quad \forall a, b \in A$

Verallgemeinerung auf Ideale:

Def.[2] Ein Primideal eines Rings A ist ein Ideal $P \neq A$ in A sodass

$$IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \text{ oder } J \subseteq P$$

<u>Lemma</u>[3] Für ein Ideal $I \subseteq A$ ist äquivalent:

a) I ist Primideal

b) $I \neq A$ und $ab \in I \Rightarrow a \in I$ oder $b \in I$ ($\Leftrightarrow a \notin I$ und $b \notin I \Rightarrow ab \notin I$)

c) A/I ist Integritätsbereich

<u>Beweis</u>

a) $\Rightarrow$ b): $ab \in I \Rightarrow (a)(b) = (ab) \subseteq I \Rightarrow (a) \subseteq I$ oder $(b) \subseteq I \Rightarrow a \in I$ oder $b \in I$.

b) $\Rightarrow$ a): Seien J, J' Ideale mit $JJ' \subseteq I$. Angenommen $J \nsubseteq I$ und $J' \nsubseteq I$. Dann gibt es $a \in J \setminus I$ und $b \in J' \setminus I$. Nach Annahme gilt $ab \in I$. Also gilt $a \in I$ oder $b \in I$ $\lightning$ Es muss also $J \subseteq I$ oder $J' \subseteq I$ sein

b) $\Leftrightarrow$ c): Offensichtlich. (A/I Bereich $\Rightarrow I \neq A$) $\square$

<u>Korollar</u>[4]: Ein Nicht-Nullteiler $p \in A$ ist Primelement genau dann, wenn (p) Primideal

<u>Beweis</u>

Sei (p) Primideal. Angenommen $p \mid ab \Rightarrow (a)(b) = (ab) \subseteq (p)$

$\Rightarrow (a) \subseteq (p)$ oder $(b) \subseteq (p)$

$\Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$.

$(p) = A \Rightarrow \exists a \in A$ mit $ap = 1 \Rightarrow p$ Einheit $\lightning$

Sei p Primelement. Es ist $(p) \neq A$, da p keine Einheit.

$ab \in (p) \Rightarrow p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b \Rightarrow a \in (p)$ oder $b \in (p)$

$\Rightarrow (p)$ Primideal (mit Lemma 2.1.3). $\square$

<u>Korollar</u>[5] Das Nullideal 0 eines Rings A ist ein Primideal genau dann, wenn A ein Integritätsbereich ist. $\square$

<u>Def</u>[6]: Die Menge der Primideale eines Rings A wird mit $\operatorname{Spec} A$ bezeichnet und das Primspektrum von A genannt.

Lemma[7]: Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus, so induziert
$$\begin{aligned} \mathrm{Ideals}(B) &\longrightarrow \mathrm{Ideals}(A) \\ J &\longmapsto f^{-1}(J) \end{aligned}$$
eine Abbildung
$$\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A \qquad \begin{matrix}\operatorname{Spec} B \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} A\end{matrix}$$
Diese wird mit $\operatorname{Spec} f$ oder f^* oder ${}^a f$ bezeichnet. Ist f surjektiv, so induziert f^* eine Bijektion
$$\operatorname{Spec} B \simeq \{P \in \operatorname{Spec} A \mid \operatorname{Ker} f \subseteq P\}.$$

Beweis: Für $J \trianglelefteq B$ haben wir $A/f^{-1}(J) \simeq B/J$ (§1.10)
$\Rightarrow A/f^{-1}(J)$ Integritätsbereich $\Leftrightarrow B/J$ Integritätsbereich
$\Rightarrow f^{-1}(J) \in \operatorname{Spec} A \Leftarrow J \in \operatorname{Spec} B$.
Rest ist klar mit §1.10. $\square$

Korollar[8]: Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus in einen Integritätsbereich B, so ist $\operatorname{Ker} f \in \operatorname{Spec} A$. $\square$

2.2. Maximale Ideale

Def[1]: Ein maximales Ideal eines Rings A ist ein maximales Element von $\mathrm{Ideals}(A) \setminus \{A\}$ bezüglich der Inklusion. Die Menge der maximalen Ideale wird mit $\mathrm{Max}(A)$ bezeichnet.

Lemma[2]: Für ein Ideal $I \trianglelefteq A$ ist äquivalent:
a) I ist maximal
b) A/I ist ein Körper

Beweis
Das folgt sofort aus folgendem Resultat:

Beh: Für einen Ring $A \neq 0$ ist äquivalent:
a) A ist Körper
b) $\text{Ideals}(A) = \{0, A\}$

Bew: a) $\Rightarrow$ b) ist klar wegen $A^\times = A \setminus \{0\}$.
b) $\Rightarrow$ a) Sei $a \in A$ keine Einheit. $\Rightarrow (a) \neq A \Rightarrow (a) = 0 \Rightarrow a = 0$. $\square$

Korollar[3] Maximale Ideale sind Primideale.

Beispiel:[4] $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{0\} \cup \underbrace{\{(p),\ p \text{ prim}\}}_{= \operatorname{Max}(\mathbb{Z})}$

Achtung[5]: Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus und $N \in \operatorname{Max}(B)$, so gilt nicht notwendig $f^{-1}(N) \in \operatorname{Max}(A)$. z.B. $f: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $0 \in \operatorname{Max} \mathbb{Q}$, aber $0 = f^{-1}(Q) \notin \operatorname{Max} \mathbb{Z}$.
Ist f aber surjektiv, so ist in der Tat $f^* \operatorname{Max}(B) \subseteq \operatorname{Max}(A)$ (§1.10).

Gibt es im allgemeinen überhaupt maximale Ideale?

Satz[6]: Jeder Ring $A \neq 0$ besitzt ein maximales Ideal (und damit ein Primideal).

Zum Beweis benötigen wir ein Resultat aus der Mengentheorie:

Zorns Lemma[7]: Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge (d.h. $\leq$ ist reflexiv und transitiv und $(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$). Eine total geordnete Teilmenge T von X heißt auch Kette in X ($t \leq s$ oder $s \leq t$ für alle $s, t \in T$).
Zorns Lemma besagt: Hat jede Kette T in X ein Supremum in X (d.h. $\exists x \in X$ mit $t \leq x\ \forall t \in T$), dann hat X mindestens ein

maximales Element.

Dieses "Lemma" ist äquivalent zum Auswahlaxiom!

In dieser Vorlesung nehmen wir an, dass das Auswahlaxiom gilt!

Nun zur Existenz maximaler Ideale:

<u>Beweis</u>
Sei $\Sigma := \mathrm{Ideals}(A) \setminus \{A\}$. Dies ist eine partiell geordnete Menge bezüglich der Inklusion. Wir wollen zeigen, dass jede Kette in Σ ein Supremum in Σ besitzt $\Longrightarrow$ Σ hat maximales Element nach Zorns Lemma.
Sei also $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Kette in Σ. Sei $I := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.
Beh: I ist ein Ideal.
Bew: $a,b \in I \Rightarrow a \in I_\lambda,\ b \in I_\mu$. Da $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Kette gilt $I_\lambda \subseteq I_\mu$ oder $I_\lambda \supseteq I_\mu$. OBdA sei $I_\lambda \subseteq I_\mu$. Dann ist $a+b \in I_\mu \subseteq I$.
$a \in I \Rightarrow -a \in I$ ist klar.
$a \in A,\ x \in I \Rightarrow ax \in I$ ist auch klar.

Es gilt $1 \notin I$, denn $1 \notin I_\lambda\ \forall \lambda \in \Lambda$. Also ist $I \in \Sigma$ und natürlich ist I ein Supremum von $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in Σ. □

<u>Korollar</u>[8]: Jedes Ideal $I \neq A$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.

<u>Beweis</u>: Wende obigen Satz auf A/I an und benutze §1.10. □

<u>Korollar</u>[9]: Jede Nicht-Einheit von A ist in einem maximalen Ideal enthalten. □

Def[10]: Ein Ring A heißt lokal, falls es genau ein maximales Ideal besitzt.

Beispiel[11]:
* Jeder Körper ist ein lokaler Ring
* Sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K in einer Variablen. Es ist
$$\mathrm{Ideals}(K[X]/(X^2)) = \{ I \trianglelefteq K[X] \mid (X^2) \subseteq I \}$$

Sei $(X^2) \subseteq I$. Da $K[X]$ Hauptidealring $\Rightarrow I = (f)$ für ein $f \in K[X]$
$\Rightarrow gf = X^2$ für ein $g \in K[X]$
$\Rightarrow \deg f \leq 2$
1. $\deg f = 0 \Rightarrow f$ Einheit $\Rightarrow I = K[X]$
2. $\deg f = 1 \Rightarrow f = aX + b,\ g = cX + d,\ X^2 = acX^2 + (ad+bc)X + bd$
   $\Rightarrow a, c$ Einheiten, $b = 0$ oder $d = 0$
   Damit $ad + bc = 0$ muss also $b = 0$ <u>und</u> $d = 0 \Rightarrow f = aX \Rightarrow I = (X)$
3. $\deg f = 2 \Rightarrow f = aX^2 + bX + c$, g Einheit $\Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow (f) = (X^2)$.

Also ist
$$\mathrm{Ideals}(K[X]/(X^2)) = \{ (0), (X), K[X]/(X^2) \}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Spec}(K[X]/(X^2)) = \{ (X) \} \Rightarrow K[X]/(X^2) \text{ lokal}$$

2.3. Minimale Ideale Übung

2.4 Radikale

Def[1]: Das Nilradikal eines Rings A ist

$$\mathrm{Nil}(A) := \{ x \in A \mid x \text{ ist nilpotent} \}.$$

Lemma[2]: $\mathrm{Nil}(A)$ ist ein Ideal in A und $\mathrm{Nil}(A/\mathrm{Nil}(A)) = 0$.

Beweis Haben in der Übung (Aufgabe 1.5b) bereits gesehen, dass $\mathrm{Nil}(A)$ abgeschlossen unter $+$. Abgeschlossen unter $-$ und Multiplikation mit A ist klar. $\Rightarrow \mathrm{Nil}(A)$ Ideal.
Sei $\bar{x} \in A/\mathrm{Nil}(A)$ nilpotent. $\Rightarrow x^n \in \mathrm{Nil}(A) \Rightarrow (x^n)^m = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Nil}(A) \Rightarrow \bar{x} = 0$. $\square$