2.4

Vorlesung 4 (28.10.16)

Satz[1] $Nil(A) = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$.

Beweis: Sei $N = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$. Wir wissen, dass N ein Ideal ist. Sei $x \in Nil(A)$.

Dann ist $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ist $P \in \operatorname{Spec} A$, so ist also $x^n \in P$. Da P Prim, folgt $x \in P$ (2.1.3 und Induktion). $\Rightarrow x \in N$. $\Rightarrow Nil(A) \subseteq N$.
Sei andererseits $x \in A \setminus Nil(A)$. Wollen zeigen, dass $x \notin N$. ($\Rightarrow N \subseteq Nil(A)$)
Sei Σ die Menge aller Ideale I in A mit der Eigenschaft

$$x^n \notin I \text{ für alle } n > 0.$$

Es ist $0 \in \Sigma$, also $\Sigma \neq \emptyset$. Sei $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Kette in Σ bzgl. $\subseteq$.
Dann ist $I := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ ein Ideal und $x^n \notin I \ \forall n > 0 \Rightarrow I \in \Sigma$ ist Supremum von $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in Σ. Zorns Lemma zeigt nun, dass Σ ein maximales Element P hat.
Beh: P ist Primideal. Wegen $x \notin P$, folgt $x \notin I$ und wir sind fertig.
Bew: Seien $a, b \in A$ mit $a \notin P$ und $b \notin P$. Dann sind $P + (a)$ und $P + (b)$ Ideale, die echt größer als P sind. Wegen der Maximalität von P, sind sie nicht in Σ enthalten. Es gibt also $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$x^n \in P + (a), \quad x^m \in P + (b)$$

$$\Rightarrow x^n = f + ac, \quad x^m = f' + bc' \text{ für gewisse } f, f' \in P,\ c, c' \in A$$

$$\Rightarrow x^{n+m} = \underbrace{ff' + fbc' + f'ac}_{\in P} + \underbrace{cc'ab}_{\in (ab)}$$

$$\Rightarrow x^{n+m} \in P + (ab)$$

Also gilt $P + (ab) \notin \Sigma$. Dann gilt aber auch $ab \notin P$, denn andererseits wäre $P + (ab) = P \in \Sigma$ ↯. Also ist P prim. $\square$

<u>Korollar</u>[2]: Sei $I \trianglelefteq A$. Dann ist $\sqrt{I} := \{x \in A \mid x^n \in I\}$ ein Ideal in A und

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} A \\ P \supseteq I}} P.$$

Man nennt $\sqrt{I}$ das Radikal von I.

<u>Beweis:</u> Wende 2.4.1 einfach auf A/I an:

$$\operatorname{Nil}(A/I) = \{\bar{x} \in A/I \text{ nilpotent}\} = \sqrt{I}$$

$$\operatorname{Nil}(A/I) = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec}(A/I)} P = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} A \\ P \supseteq I}} P.$$

□

<u>Def:</u> $I \trianglelefteq A$ heißt Radikalideal, falls $\sqrt{I} = I$.

<u>Beispiel:</u>[3]

* Es gilt $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$, d.h. $\sqrt{I}$ ist Radikalideal.
* In $K[X]$ gilt $\sqrt{(X^n)} = (X)$. Insbesondere ist (X) Radikalideal.
* In $\mathbb{Z}$ gilt $\sqrt{(4)} = (2)$.

<u>Lemma</u>[4]: Jedes Primideal ist Radikalideal.

<u>Beweis:</u> Sei $P \in \operatorname{Spec} A$. Sei $x \in \sqrt{P}$, d.h. $x^n \in P$. Ist $n=1$, so ist $x \in P$. Sei also $n > 1$. $\rightsquigarrow x^n = x \cdot x^{n-1} \in P$. Da P prim folgt $x \in P$ oder $x^{n-1} \in P$. $\rightsquigarrow$ Induktion zeigt, dass $x \in P$.

□

Def: Man nennt
$$\mathrm{Jac}(A) := \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(A)} M$$
das Jacobson Radikal von A.

Lemma[5]: $x \in \mathrm{Jac}(A) \iff 1 - xy$ ist Einheit für alle $y \in A$.

Beweis:
"$\Rightarrow$": Angenommen, $1-xy$ wäre keine Einheit. Nach Korollar 2.2.9 gibt es dann $M \in \mathrm{Max}(A)$ mit $1-xy \in M$. Aber $x \in \mathrm{Jac}(A) \subseteq M \Rightarrow xy \in M$ $\Rightarrow 1 \in M \Rightarrow M = A$ ↯ Also muss $1-xy$ Einheit sein.
"$\Leftarrow$": Angenommen, es gibt $M \in \mathrm{Max}(A)$ mit $x \notin M$. Da M maximal, gilt $(M, x) = A$. Es gibt also $m \in M$, $y \in A$ mit $1 = m + xy$. $\Rightarrow 1 - xy \in M$ $\Rightarrow 1 - xy$ keine Einheit ↯. $\Rightarrow x \in M$ $\forall M \in \mathrm{Max}(A) \Rightarrow x \in \mathrm{Jac}(A)$. □

2.5 Algebraische Geometrie

Algebraische Geometrie ist das Studium von Nullstellenmengen von Systemen von Polynomen in mehreren Variablen (algebraische Mengen).

Sei R ein Ring und Λ eine Menge $\rightsquigarrow$ Polynomring $R[(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$.

Übungsaufgabe 2.3d: Ist B eine R-Algebra und $b := (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in B^\Lambda$, so gibt es einen eindeutigen R-Algebrenmorphismus
$$R[(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}] \longrightarrow B$$
mit
$$X_\lambda \longmapsto b_\lambda.$$

Für $f \in R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ schreiben wir $f(b)$ für das Bild unter diesem Morphismus.
Damit erhalten wir nun einen R-Algebrenmorphismus

$$\phi: R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}] \longrightarrow \mathrm{Maps}(B^\Lambda, B)$$
$$f \longmapsto (b \mapsto f(b))$$

Das Bild dieser Morphismus ist die R-Algebra der Polynomfunktionen auf B^Λ.

<u>Def</u>[1]: Die Nullstellenmenge einer Teilmenge $S \subseteq R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ über B ist

$$Z_S(B) := \{ b \in B^\Lambda \mid f(b) = 0 \ \forall f \in S \}$$

Diese Teilmengen von B^Λ heißen auch algebraische Mengen.

Ein "Polynomsystem" S beschreibt also eine Abbildung

$$Z_S : {}_R\mathrm{CAlg} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

Kategorie kommutativer R-Algebren

Kategorie der Mengen

} siehe Übung 3

Ist $\varphi: B \to B'$ ein R-Algebrenmorphismus, so erhalten wir kanonisch

$$Z_S(\varphi): Z_S(B) \longrightarrow Z_S(B')$$
$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto (\varphi(b_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$$

Nennen Z_S den durch S definierten Nullstellenfunktor.

Lemma[2]: Es gilt $Z_S = Z_{(S)}$, also $Z_S(B) = Z_{(S)}(B)$ für alle R-Algebren B
$\uparrow$ das von S erzeugte Ideal.

Beweis Klar. $\square$

Jedes Ideal $I \trianglelefteq R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ definiert also einen Nullstellenfunktor Z_I.

Frage[3]: Warum variiert man über alle R-Algebren?
$\Rightarrow$ weil man nur so die gesamte Struktur sieht!

Bsp[4]: Sei $S = \{X^2-2\} \subseteq \mathbb{Q}[X]$. Es ist $Z_S(\mathbb{Q}) = \emptyset$, aber $Z_S(\mathbb{R}) = \{\pm\sqrt{2}\}$.
Würde man das nur über $\mathbb{Q}$ betrachten, würde das also genauso aussehen wie die Nullstellenmenge von $\{1\}$. Erst über Erweiterungen tritt mehr zum Vorschein.

Nun ist aber jede R-Algebra isomorph zu einem Quotienten $R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]/I$ für ein Λ und ein Ideal I (Übungsaufgabe 2.3e).
$\Rightarrow$ Jede R-Algebra definiert einen Nullstellenfunktor und "Geometrie".

Ab hier für Experten.
Wollen aber eine Definition die nicht von der Wahl der Präsentation $R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]/I$ abhängt. Wir gehen wie folgt vor
Übungsaufgabe 2.3d: Wir haben kanonische Bijektion

$$B^\Lambda \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-}Alg}(R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}], B)$$

Es ist $Z_0(B) = B^\Lambda$ für das Nullideal in $R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$, d.h.

$$Z_0(-) \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-}Alg}(R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}], -)$$

Sei nun $I \trianglelefteq R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$.

$$\begin{array}{ccl} Z_0(A)=B^\Lambda & \simeq & \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}],B) \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z_I(B) & \simeq & \{\varphi\in \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}],B),\ I\subseteq \ker\varphi\} \\ & \simeq & \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]/I,\ B) \end{array}$$

Also:

$$Z_I(-)\simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]/I,\ -) \quad \text{für } I\trianglelefteq R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}].$$

Mit dieser Sichtweise definieren wir für eine R-Algebra A:

$$Z_A(-) := \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(A,-).$$

Das kodiert die "Geometrie" von A. Wählen wir eine Präsentation $A\simeq R[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]/I$, so ist $Z_A(-)\simeq Z_I(-)$ (als Funktoren).

In der Tat kann man zeigen: $A\simeq A' \Leftrightarrow Z_A(-)\simeq Z_{A'}(-)$ (als Funktoren) (Yoneda Lemma).

<u>Bsp</u>[5]: Die Ideale $I:=(X)$ und $I':=(X^2)$ in $\mathbb{Q}[X]$ sind verschieden. Also sollten ihre Nullstellenfunktoren auch verschieden sein.

$$Z_I(\mathbb{Q})=\{0\}=Z_{I'}(\mathbb{Q})$$

Sei aber $A:=\mathbb{Q}[X]/(X^2)$, eine $\mathbb{Q}$-Algebra. Dann gilt

$$Z_I(A)=\{0\},\quad Z_{I'}(A)=\{0,X\} \quad !$$

Betrachtet man nur Lösungen in Körpern, kann man nicht mehr alles unterscheiden. Trotzdem ist das der natürlichste Fall.

Def.[6] Für eine R-Algebra A definieren wir die Menge der Orte als

$$\mathrm{Loc}(A) := \left\{ \varphi \in Z_A(L) = \mathrm{Hom}_{R\text{-}Alg}(A, L) \;\middle|\; L \text{ ist Körper} \right\}$$

Definiere darauf eine Äquivalenzrelation wie folgt: Sei $\varphi \in Z_A(L)$ und $\varphi' \in Z_A(L')$. Dann sei $\varphi \sim \varphi'$ genau dann, wenn ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} & L'' & \\ L \arrow[ur] & & L' \arrow[ul] \\ & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

mit einem Körper L'' existiert.

Ist nun $\varphi \in \mathrm{Loc}(A)$, $\varphi : A \to L$, so ist $P_\varphi := \mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(0) \in \mathrm{Spec}\,A$!
Ist $\varphi \sim \varphi'$, so ist $P_\varphi = P_{\varphi'}$. Wir bekommen so Abbildung

$$\mathrm{Loc}(A)/\sim \;\longrightarrow\; \mathrm{Spec}(A)$$

In der Tat ist diese Abbildung eine Bijektion: Jedes $P \in \mathrm{Spec}\,A$ definiert kanonisch einen Erweiterungskörper $A/P \hookrightarrow k(P) = \mathrm{Frac}(A/P)$ und wir bekommen $A \twoheadrightarrow A/P \hookrightarrow k(P)$. Für $M \in \mathrm{Max}(A)$ ist $k(M) = A/M$.
Details zu $k(P)$ später.
d.h. also:

Primideale von A $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Körperwertige Lösungen des von (einer Präsentation von) A definierten Polynomsystems!

<u>Wichtiger Fall:</u>[7] K ein Körper und A eine K-Algebra.

Ist $\varphi \in Z_A(K) = \mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(A,K)$, so ist φ bereits surjektiv.

Folglich ist $P_\varphi = \ker \varphi \in \mathrm{Max}(A)$.

Haben daher $Z_A(K) \hookrightarrow \mathrm{Max}(A)$

Das ist nicht notwendig eine Bijektion, z.B. ist $(X^2-2) \in \mathrm{Max}(\mathbb{Q}[X])$, aber $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supsetneq \mathbb{Q}$; kommt also nicht Lösung über $\mathbb{Q}$.