Vorlesung 5 (2.11.16)

2.6 Zariski-Topologie

Erinnerung[1]: Eine Topologie auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{U}$ von Teilmengen von X, genannt offene Teilmengen, sodass gilt:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$

b) $\mathcal{U}$ ist abgeschlossen unter Vereinigungen (auch unendlichen)

c) $\mathcal{U}$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten.

Komplemente offener Teilmengen heißen abgeschlossen. Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen $\forall V \subseteq Y$ offen.

Bsp[2]: Sei (X,d) ein metrischer Raum, z.B. $\mathbb{R}^n$ mit Standardmetrik. Sei $\mathcal{U}$ die Menge beliebiger Vereinigungen von Umgebungen $U_\varepsilon(x)$ mit $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann ist $\mathcal{U}$ eine Topologie. Stetigkeit zwischen metrischen Räumen (ε-δ Kriterium) ist äquivalent zu Urbilder offener Mengen sind offen.

Die Menge $\mathcal{Z}$ der abgeschlossenen Teilmengen erfüllt:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{Z}$

b) $\mathcal{Z}$ ist abgeschlossen unter Schnitten (auch unendliche)

c) $\mathcal{Z}$ ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen.

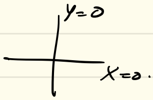
Andererseits definieren die Komplemente so eines Mengensystems $\mathcal{Z}$ eine Topologie, deren abgeschlossene Teilmengen genau die Mengen in $\mathcal{Z}$ sind. Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn Urbilder abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen sind.

Der **Abschluss** $\overline{S}$ einer Menge $S\subseteq X$ ist die kleinste S enthaltende abgeschlossene Teilmenge von X. Es ist

$$\overline{S} = \bigcap_{\substack{Z\subseteq X \text{ abgeschl.}\\ S\subseteq Z}} Z$$

Man sagt, S ist **dicht** in X wenn $\overline{S}=X$.

Wollen nun eine Topologie auf Spec A definieren, deren abgeschlossene Teilmengen "Mengen der körperwertigen Lösungen eines Polynomsystems" entsprechen.

<u>Bsp</u>[3]: $S=\{XY\}\subseteq k[X,Y]$. Nullstellenmenge ist geometrisch 

Körperwertige Lösungen sind

1) Die Punkte $(\alpha,0),(0,\alpha)$, $\alpha\in k$, entsprechend den maximalen Idealen $(X-\alpha,Y)$ und $(X,Y-\alpha)$.

2) Die durch die beiden Primideale $(X),(Y)\in \operatorname{Spec} k[X,Y]$ definierten "Punkte", denn diese definieren Algebrenmorphismen

$$k[X,Y]/(XY) \twoheadrightarrow \left(k[X,Y]/(XY)\right)/(X) \simeq k[Y] \hookrightarrow k(Y)$$

$$k[X,Y]/(XY) \longrightarrow k(X)$$

in einen Körper und damit körperwertige Lösung von S.

Es sind also gerade die über S liegenden Primideale!

Def[4]: Für eine Teilmenge S eines Rings A definieren wir: V für "Varietät"

$$V(S) := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid S \subseteq P\}$$

Lemma[5]: Diese Mengen definieren die <u>abgeschlossenen</u> Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec} A$. Diese wird Zariski-Topologie genannt.

Beweis: Es ist $V(0) = \operatorname{Spec} A$ und $V(A) = \emptyset$.
Sicherlich gilt $V(S) = V((S))$ das von S erzeugte Ideal.
Sei also $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Idealen in A.

Beh: $V\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$ $\Rightarrow$ abgeschlossen unter Schnitten

Bew: $P \in V(\bigcup I_\lambda) \Leftrightarrow \bigcup I_\lambda \subseteq P \Leftrightarrow I_\lambda \subseteq P \ \forall \lambda$
$\Leftrightarrow P \in V(I_\lambda) \ \forall \lambda \Leftrightarrow P \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$

Beh: $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ $\Rightarrow$ abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen

Bew: $P \in V(IJ) \Leftrightarrow IJ \subseteq P \Leftrightarrow I \subseteq P$ oder $J \subseteq P$, da P prim (§2.1).

$\square$

Lemma[6] Ist $f: A \to B$ ein Ringmorphismus so ist $f^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ stetig.

Beweis:
Beh: $(f^*)^{-1}(V(I)) = V(f(I))$ $\Rightarrow$ Urbilder abgeschl. Teilmengen sind abgeschl. $\Rightarrow$ stetig.

Bew:

$$
\begin{aligned}
(f^*)^{-1}(V(I)) &= \{ J \in \operatorname{Spec} B \mid f^*(J) \in V(I) \} \\
&= \{ J \in \operatorname{Spec} B \mid f^{-1}(J) \in V(I) \} \\
&= \{ J \in \operatorname{Spec} B \mid I \subseteq f^{-1}(J) \} \\
&\overset{*}{=} \{ J \in \operatorname{Spec} B \mid f(I) \subseteq J \} \\
&= V(f(I)).
\end{aligned}
$$

$* \; f(f^{-1}(J)) \subseteq J$
$\quad I \subseteq f^{-1}(f(I))$

$\square$

<u>Korollar (Übung 3.4)</u>[7] $\operatorname{Spec}: \mathrm{CRing} \longrightarrow \mathrm{Top}$ ist ein Funktor

<u>Def</u>[8]: Für eine Teilmenge $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ definieren wir $I(Y) := \bigcap_{P \in Y} P$.

Wir haben nun Abbildungen

$$\mathrm{Ideals}(A) \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \mathrm{Subsets}(\operatorname{Spec} A)$$

Nach Konstruktion sind diese inklusionsumkehrend, also

$$J \subseteq J' \implies V(J) \supseteq V(J')$$
$$Y \subseteq Y' \implies I(Y) \supseteq I(Y')$$

<u>Lemma</u>[9]: Sei A ein Ring, $J \trianglelefteq A$ und $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$.

a) $\sqrt{I(Y)} = I(Y)$

b) $I(V(J)) = \sqrt{J}$

c) $V(I(Y)) = \overline{Y}$

d) V und I induzieren paarweise inverse Bijektionen

$$\text{Radikalideale in } A \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \text{abgeschlossene Teilmengen in } \operatorname{Spec} A$$

Bew:

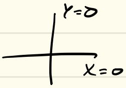
a) $x^n \in I(Y) = \bigcap_{P \in Y} P \Rightarrow x^n \in P \ \forall P \in Y \Rightarrow x \in P \ \forall P \in Y$ da P prim und somit Radikal (2.4.2) $\Rightarrow x \in I(Y) \Rightarrow$ a)

b) $I(V(J)) = \bigcap_{P \in V(J)} P = \bigcap_{J \subseteq P} P = \sqrt{J}$ nach 2.4.2

c) Ist $P \in Y$, so ist $I(Y) \subseteq P \Rightarrow P \in V(I(Y)) \Rightarrow Y \subseteq V(I(Y))$.
Weiterhin ist $V(I(Y))$ abgeschlossen. Sei $Z \subseteq \operatorname{Spec} A$ abgeschlossen mit $Y \subseteq Z$. Es ist $Z = V(J)$ für ein $J \trianglelefteq A$. Wegen $Y \subseteq V(J)$ gilt $J \subseteq P \ \forall P \in Y$
$\Rightarrow J \subseteq \bigcap_{P \in Y} P = I(Y) \Rightarrow J \subseteq I(Y) \Rightarrow V(J) \supseteq V(I(Y))$, d.h. $V(I(Y))$ ist die kleinste Y enthaltende Teilmenge $\Rightarrow V(I(Y)) = \overline{Y}$.

d) Folgt sofort aus a, b, c. $\square$

Bem[10]: Die Zariski-Topologie ist eine sehr ungewöhnliche Topologie.
z.B gibt es nicht abgeschlossene Punkte: In $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist (0) dicht!
(ein sogenannter generischer Punkt).
Im Allgemeinen: abgeschlossene Punkte $= \operatorname{Max}(A)$.
Wir betrachten diese Topologie einfach als Hilfsmittel, um interessante Fragen zu stellen und gewisse Eigenschaften von $\operatorname{Spec} A$ zu beschreiben.
z.B irreduzible Komponenten.

Idee[11]: $K[X,Y]/(XY) =$ 

ist die Vereinigung von zwei Komponenten!

Def[12]: Ein topologischer Raum X heißt irreduzibel, falls $X \neq \emptyset$ und X kann nicht als Vereinigung nicht leerer abgeschlossener Teilmengen geschrieben werden, d.h. $X = Z_1 \cup Z_2$ mit Z_1, Z_2 abgeschlossen $\Rightarrow Z_1 = X$ oder $Z_2 = X$. (vgl. Primideal!)

Bem[13]: Dieser Begriff ist für "gewöhnliche" Topologien etwas komisch. $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie ist reduzibel, denn $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, \infty)$, beide Mengen sind abgeschlossen.
"Problem" hier: zu viele abgeschlossene Mengen. Das ist bei der Zariski-Topologie nicht der Fall.

Lemma[14] Für einen topologischen Raum $X \neq \emptyset$ ist äquivalent:
a) X ist irreduzibel
b) Je zwei nicht leere offene Teilmengen von X haben nicht leeren Schnitt.

Beweis
$X = Z_1 \cup Z_2 \Rightarrow \emptyset = X \setminus (Z_1 \cup Z_2) = (X \setminus Z_1) \cap (X \setminus Z_2)$. Nun klar. $\square$

Def[15]: Sei $(X, \mathcal{U})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann definiert $\{ Y \cap U \mid U \in \mathcal{U} \}$ eine Topologie auf Y (induzierte Topologie). Nennen Y irreduzibel, falls irreduzibel mit dieser Topologie.