2.6

Vorlesung 6 (4.11.16)

Letztes Mal: Induzierte Topologie auf Teilmenge

Lemma:[16] Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\overline{Y}$ ist irreduzibel.

Beweis: Können $Y \neq \emptyset$ annehmen.

Beh: Die abgeschlossenen Teilmengen von Y sind von der Form $Y \cap Z$, $Z \subseteq X$ abgeschl.

Bew: Die offenen Teilmengen von Y sind von der Form $Y \cap U$, die abgeschlossenen also von der Form

$$Y \setminus (Y \cap U) = Y \setminus U = \underbrace{(X \setminus U)}_{\text{abgeschlossen in } X} \cap Y$$

Sei nun Y irreduzibel. Angenommen $\overline{Y} = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_i \subseteq \overline{Y}$ abgeschlossen. Es ist $Z_i = \overline{Y} \cap A_i$ mit $A_i \subseteq X$ abgeschlossen. Es folgt $Y = (Y \cap Z_1) \cap (Y \cap Z_2)$. Da $Y \cap Z_i = Y \cap A_i$ abgeschl. in Y und Y irreduzibel, folgt OBdA $Y = Y \cap Z_1 = Y \cap A_1$ $\Rightarrow Y \subseteq A_1 \Rightarrow \overline{Y} \subseteq A_1 \Rightarrow Z_1 = \overline{Y} \cap A_1 = \overline{Y}$. Also ist $\overline{Y}$ irreduzibel.

Sei andererseits Y reduzibel, $Y = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_i \subsetneq Y$ abgeschlossen. Dann ist $\overline{Y} = \overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2$ und $\overline{Z}_i \subsetneq \overline{Y}$ abgeschlossen, also $\overline{Y}$ reduzibel. $\square$

Def:[17] Eine *irreduzible* Komponente eines topologischen Raums ist eine maximale irreduzible Teilmenge.

Lemma:[18] Sei X ein topologischer Raum. Jede irreduzible Teilmenge von X liegt in einer irreduziblen Komponente von X. Insbesondere ist X Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten. Diese sind darüber hinaus alle abgeschlossen.

Beweis:

Sei $Y \subseteq X$ irreduzibel. Sei Σ die Menge aller Y enthaltenden irreduziblen Teilmengen. Es ist $\Sigma \neq \emptyset$, denn $Y \in \Sigma$. Sei $(Z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Kette in Σ. Sei $Z := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$.

Beh: Z ist irreduzibel.

Bew: Sei $Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_i \subseteq Z$ abgeschlossen.
Für $\lambda \in \Lambda$ gilt $Z_\lambda = Z_\lambda \cap (Z_1 \cup Z_2) = (Z_\lambda \cap Z_1) \cup (Z_\lambda \cap Z_2)$, also $Z_\lambda \cap Z_1 = Z_\lambda$ ($\Rightarrow Z_\lambda \subseteq Z_1$) oder $Z_\lambda \cap Z_2 = Z_\lambda$ ($\Rightarrow Z_\lambda \subseteq Z_2$) da Z_λ irreduzibel. Ist $Z_\lambda \subseteq Z_1 \ \forall \lambda \Rightarrow Z \subseteq Z_1 \Rightarrow Z = Z_1$.
Gibt es andererseits μ mit $Z_\mu \not\subseteq Z_1$, so muss $Z_\mu \subseteq Z_2$ gelten und damit $Z_\lambda \subseteq Z_2 \ \forall \lambda \Rightarrow Z \subseteq Z_2$, denn: Es ist $Z_\lambda \subseteq Z_\mu$ oder $Z_\mu \subseteq Z_\lambda$. Ist $Z_\lambda \subseteq Z_\mu$, so $Z_\lambda \subseteq Z_2$.
Ist $Z_\lambda \supseteq Z_\mu$ aber $Z_\lambda \not\subseteq Z_2 \Rightarrow Z_\lambda \subseteq Z_1 \Rightarrow Z_\mu \subseteq Z_1$ ↯.
Also $Z = Z_1$ oder $Z = Z_2$.
Folglich ist Z irreduzibel, also $Z \in \Sigma$.
Zorns Lemma zeigt nun, dass Σ ein maximales Element hat. Dies ist eine maximale irreduzible Teilmenge von X, also eine irreduzible Komponente.
Für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ eine irreduzible Menge, liegt also in einer irreduziblen Komponente. Daher ist X Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.
Ist Z irreduzible Komponente, so ist $\overline{Z}$ irreduzibel nach Lemma, wegen Maximalität von Z muss also $Z = \overline{Z}$ gelten, d.h. Z ist abgeschl. □

<u>Lemma</u> 19: Sei A ein Ring. Dann ist $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ irreduzibel genau dann, wenn $I(Y)$ ein Primideal ist. In diesem Fall ist $I(Y)$ dicht in $\overline{Y}$.

<u>Beweis:</u>
Angenommen, Y irreduzibel $\Rightarrow \overline{Y}$ irreduzibel. Nach Lemma 2.6.16 ist $V(I(Y)) = \overline{Y}$. Seien $a, b \in A$ mit $ab \in I(Y)$. Dann gilt

$$V(I(Y)) \subseteq V(ab) = V(a) \cup V(b)$$

Da $\overline{Y} = V(I(Y))$ irreduzibel, gilt $V(I(Y)) \subseteq V(a)$ oder $V(I(Y)) \subseteq V(b)$, d.h. $(a) \subseteq I(Y)$ oder $(b) \subseteq I(Y) \Rightarrow I(Y)$ ist Primideal

Sei andererseits P Primideal. Dann gilt nach Lemma 2.6.9

$$\overline{\{P\}} = V(I(\{P\})) = V(P)$$

$$I(\{P\}) = \bigcap_{Q \supseteq P} Q = P$$

Da $\{P\}$ irreduzibel, ist also auch nach Lemma auch $\overline{\{P\}} = V(P)$ irreduzibel. □

<u>Korollar</u>[20]: Die Abbildung $P \mapsto V(P) = \overline{\{P\}}$ ist eine Bijektion zwischen Spec A und den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von Spec A. Die irreduziblen Komponenten von $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ entsprechen den minimalen Primidealen in Y. □

<u>Korollar</u>[21]: Jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq \operatorname{Spec} A$ hat einen eindeutigen Punkt $z \in Z$ mit $\overline{\{z\}} = Z$ (generischer Punkt von Z). □

3. Moduln

3.1 Moduln

<u>Def</u>[1]: Sei A ein Ring. Ein A-Modul ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $A \times V \to V$, $(a,v) \mapsto av$, für die gilt

* $a(v+w) = av + aw \quad \forall a \in A,\ w, v \in V$
* $(a+b)v = av + bv \quad \forall a, b \in A,\ v \in V$
* $(ab)v = a(bv) \quad$ "
* $1v = v \quad \forall v \in V.$

Sind V, W A-Moduln, so ist ein A-Modulmorphismus von V nach W eine Abbildung $f: V \to W$ mit

* $f(v+v') = f(v) + f(v') \quad \forall v, v' \in V$
* $f(av) = a f(v) \quad \forall a \in A,\ v \in V.$

Komposition von A-Modulmorphismen ist wieder A-Modulmorphismus
$\Rightarrow$ Kategorie $Mod(A)$ der A-Moduln

Ein Untermodul eines A-Moduls V ist eine Untergruppe $U \subseteq V$ mit $AU \subseteq U$. Die Operation von A auf V schränkt sich dann auf U ein und macht U damit selbst zu A-Modul.

Beispiele[2]:

* Ist K ein Körper, so sind K-Moduln genau K-Vektorräume und Modulmorphismen genau lineare Abbildungen.

* Für jeden Ring A ist A selbst ein A-Modul mit der Multiplikation als Operation, d.h. $A \times A \to A$, $(a, a') \mapsto aa'$.
Betrachten einen Ring über sich selbst immer mit dieser Modulstruktur.
Aber Achtung: Modulmorphismen bzgl. dieser Struktur sind keine Ringmorphismen

Ringmorphismus	Modulmorphismus
$f: A \to B$	$f: A \to B$
$f(a+a') = f(a) + f(a')$	$f(a+a') = f(a+a')$
$f(aa') = f(a) f(a')$	$f(aa') = a f(a')$
$f(1) = 1$	keine spezielle Bedingung an $f(1)$

* A-Untermoduln von A sind genau die Ideale in A!

* Abelsche Gruppen = $\mathbb{Z}$-Moduln: Ist G abelsche Gruppe, so ist G $\mathbb{Z}$-Modul durch $ng := \underbrace{g + \dots + g}_{n\text{-mal}}$ für $n \in \mathbb{Z}$, $g \in G$. Umkehrung klar.

Morphismen abelscher Gruppen = $\mathbb{Z}$-Modulmorphismen.

* Sind V, W A-Moduln, so ist auch die Menge $\mathrm{Hom}_A(V,W)$ der A-Modulmorphismen $V \to W$ ein A-Modul durch punktweise Operation, d.h.

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$
$$(af)(v) := af(v)$$

* Achtung: Im Gegensatz zu Vektorräumen müssen Moduln keine Basis haben z.B. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (abelsche Gruppe) als $\mathbb{Z}$-Modul. Für jedes $v \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt $nv = 0$. Das "killen" von Modulelementen ist über einem Körper niemals möglich!

* Sei K ein Körper. Dann $K[X]$-Moduln = Paare (V, A) bestehend aus V-Vektorraum V und $A \in \mathrm{End}(V)$.
Denn: Sei V ein $K[X]$-Modul. Da $K \subseteq K[X]$ operiert insbesondere auf K auf V, d.h. V ist kanonisch K-Vektorraum. Definiere nun A durch

$$Av := Xv \quad \text{für } v \in V$$

Operation von $X \in K[X]$ auf v.

Ist andererseits ein Paar (V, A) gegeben, so definiere $K[X]$-Modul-struktur durch

$$Xv := Av \quad v \in V$$

und dann fortsetzen, d.h. für $p = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ setze

$$pv := p(A)v = a_0 v + a_1 Av + a_2 A^2 v + \dots + a_n A^n v.$$

"Geheimnis": Struktur von (endlich erzeugten) Moduln über Hauptideal-ringen (z.B. $K[X]$) $\Rightarrow$ Jordansche Normalform!