Vorlesung 7 (9.11.16)

3.2. Konstruktionen mit Moduln

Folgendes ist alles analog zu Vektorräumen:

* Isomorphismen = bijektive Morphismen
* Ist $f: V \to W$ Modulmorphismus, so haben wir

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Submodules}(V) & \rightleftarrows & \mathrm{Submodules}(W) \\ V' & \longmapsto & f(V') \\ f^{-1}(W') & \longleftarrow\!\shortmid & W' \end{array}$$

Insbesondere sind $\mathrm{Ker} f \subseteq V$, $\mathrm{Im} f \subseteq W$ Untermoduln.
Ist f surjektiv, so ist

$$\{V' \subseteq V \text{ Untermodul mit } V' \supseteq \mathrm{Ker} f\} \simeq \mathrm{Submodules}(W).$$

Insbesondere ist für $U \subseteq V$ Untermodul

$$\{V' \subseteq V \text{ Untermodul mit } U \subseteq V'\} \simeq \mathrm{Submodules}(V/U).$$

* Quotienten nach Untermoduln (+ universelle Eigenschaft)
* Direktes Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ von Moduln (+ univ. Eigenschaft)
* Direkte Summe $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \{(v_\lambda)_\lambda \in \prod V_\lambda \mid v_\lambda = 0 \text{ für fast alle } \lambda\} \subseteq \prod V_\lambda$
* Summen und Schnitte von Untermoduln
* Isomorphiesätze

* "Einschränken der Skalare" (Pullback):

Ist $\varphi: A \to B$ ein Ringmorphismus und W ein B-Modul, so wird W zu einem A-Modul durch

$$aw := \varphi(a)w$$

Man schreibt auch W_A für diesen Modul (φ ignorierend).
Ein B-Modulmorphismus $f: W \to W'$ ist dann automatisch auch ein A-Modulmorphismus $W_A \to W'_A$.

$\rightsquigarrow$ bekommen Funktor $(-)_A : \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A)$.

3.3. Erzeugendensysteme

Ist S eine Teilmenge eines A-Moduls V, so existiert ein eindeutiger kleinster S enthaltender Untermodul, nämlich

$$AS := \bigcap_{\substack{U \subseteq V \text{ Untermodul} \\ S \subseteq U}} U = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda s_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in A,\, s_\lambda \in S,\, |\Lambda| < \infty \right\}.$$

= "endliche Linearkombinationen der Elemente aus S"

Man nennt S Erzeugendensystem von AS. Jeder A-Modul S hat ein Erzeugendensystem.

Def[1] Sei V ein A-Modul. Man nennt

$$\mu_A(V) := \mathrm{Min}\{ |S| \mid S \text{ Erzeugendensystem von } V\}$$

die minimale Erzeugendenzahl von V.
Ein minimales Erzeugendensystem ist ein Erzeugendensystem, das minimal bzgl. Inklusion ist. Man nennt V endlich erzeugt, falls $\mu_A(V) < \infty$ (d.h. es existiert endliches Erzeugendensystem).

Die Fälle $\mu_A(V) < \infty$ und $\mu_A(V) = \infty$ verhalten sich etwas gegensätzlich:

(0) Die minimale Erzeugendenzahl existiert immer, da Kardinalzahlen wohlgeordnet.

(1) $\mu_A(V) < \infty$. Hier existiert natürlich ein minimales Erzeugendensystem.

Ist aber S ein minimales Erzeugendensystem, so muss nicht notwendig $\mu_A(V) = |S|$ gelten! Betrachte z.B. den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$. Hier ist $\{2,3\}$ minimales Erzeugendensystem, aber $\mu_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = 1$, denn $\mathbb{Z}$ wird von $\{1\}$ erzeugt!

Es gilt aber zumindest folgendes Lemma.

<u>Lemma</u> 2: Ist V endlich erzeugter A-Modul, so enthält jedes Erzeugendensystem von V ein endliches Erzeugendensystem.

<u>Beweis:</u> Sei $S = (s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ beliebiges Erzeugendensystem von V. Da V endlich erzeugt, gibt es $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $V = Av_1 + \dots + Av_n$. Für jedes $i = 1, \dots, n$ gibt es endliche Teilmenge $\Lambda_i \subseteq \Lambda$ mit

$$v_i = \sum_{\lambda \in \Lambda_i} a_{i\lambda} s_\lambda$$

Sei $\Lambda' := \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$. Dass ist endliche Menge und $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ ist Erzeugendensystem. $\square$

(2) $\mu_A(V) = \infty$. Hier muss ein minimales Erzeugendensystem nicht notwendig existieren, z.B. hat der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ keins (siehe Übung)

Es gilt aber im Gegensatz zu (1):

Lemma[3]: Ist $\mu_A(V) = \infty$ und besitzt V ein minimales Erzeugendensystem S, so gilt bereits $\mu_A(V) = |S|$.

Beweis: Sei $T \subseteq V$ ein Erzeugendensystem mit $\mu_A(V) = |T|$.
Sei $S = \{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ein minimales Erzeugendensystem. Zu jedem $t \in T$ gibt es eine endliche Teilmenge $\Lambda_t \subseteq \Lambda$ mit $t \in \sum_{\lambda \in \Lambda_t} A s_\lambda$.
Sei $\Lambda' := \bigcup_{t \in T} \Lambda_t$. Dann ist $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ Erzeugendensystem. Da aber S minimal, muss $\Lambda' = \Lambda$ gelten. Nun ist $|\Lambda| = |\Lambda'| \overset{!}{=} |T| = \mu_A(V)$.

Λ' Vereinigung über durch T indizierte endliche Mengen. Da $|T| = \infty$, bleibt Kardinalität gleich.

□

3.4 Freie Moduln

Def[1]: Sei V ein A-Modul. Eine Teilmenge $S = \{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von V heißt *linear unabhängig*, falls jede Relation

$$\sum_{\Lambda' \subseteq \Lambda \text{ endlich}} a_\lambda s_\lambda = 0$$

bereits $a_\lambda = 0 \ \forall \lambda$ impliziert. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt *Basis*. Man sagt, V ist *freier* A-Modul, falls V eine Basis besitzt.

Bsp[2]: Ist K ein Körper, so ist jeder K-Modul frei (=Vektorräume).

Lemma[3]: Ist $S = (s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Basis von V, so besitzt jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda s_\lambda$, d.h. $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda s_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda s_\lambda \Rightarrow a_\lambda = b_\lambda \ \forall \lambda$.

Beweis: Klar wegen linear unabhängig und Erzeugendensystem.

□

Lemma[4]: V ist frei genau dann, wenn $V \simeq A^{(\Lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A$ für eine Menge Λ.

Beweis: Eine Basis $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von V definiert einen Isomorphismus

$$V \simeq A^{(\Lambda)}, \quad v_\lambda \mapsto e_\lambda \quad (e_\lambda = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{Position } \lambda}{1}, 0, \dots, 0))$$

und umgekehrt liefert ein Isomorphismus $A^{(\Lambda)} \simeq V$ durch Bilder der e_λ eine Basis. $\square$

Def[5]: Ein Torsionselement eines A-Moduls V ist ein $v \in V$, sodass es einen Nicht-Nullteiler $a \in A$ gibt mit $av = 0$. Es sei $T(V)$ die Menge der Torsionselemente von V.

Lemma[6]: $T(V)$ ist Untermodul von V.

Beweis: $0 \in T(V)$ klar. Seien $v, v' \in T(V)$. Es gibt dann Nicht-Nullteiler $a, a' \in A$ mit $av = 0$, $a'v' = 0$. Dann ist auch aa' Nicht-Nullteiler und $aa'(v + v') = aa'v + aa'v' = a'av + aa'v' = 0$, also $v + v' \in T(V)$. Weiterhin ist $a(a''v) = a''av = 0 \Rightarrow a''v \in T(V)$ $\forall a'' \in A$. $\square$

Lemma[7]: Ist V freier A-Modul, so ist $T(V) = 0$.

Beweis: Sei $S = (s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Basis von V. Sei $v \in T(V)$ und $a \in A$ Nicht-Nullteiler mit $av = 0$. Es ist $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda v_\lambda$ für gewisse $a_\lambda \in A$, also $0 = av = \sum_{\lambda \in \Lambda} a a_\lambda v_\lambda$. Da S Basis, folgt $a a_\lambda = 0$ $\forall \lambda$. Da a Nicht-Nullteiler, gilt $a_\lambda = 0$ $\forall \lambda$, d.h. $v = 0$. $\square$

Korollar[8]: Ist $T(V) \neq 0$, so ist V kein freier Modul. $\square$

Bsp.[9] Betrachte $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Es ist $T(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kein freies $\mathbb{Z}$-Modul.

Lemma[10]: Sei $A \neq 0$ und V ein freier A-Modul. Eine Basis von V ist ein minimales Erzeugendensystem.

Beweis: Sei $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Basis von V. Sei $\Lambda' \subsetneq \Lambda$, sodass $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}$ immer noch Erzeugendensystem. Sei $\mu \in \Lambda\setminus\Lambda'$. Dann ist

$$s_\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda'} a_\lambda s_\lambda$$

für gewisse $a_\lambda \in A$. Folglich $\sum_{\lambda\in\Lambda'} a_\lambda s_\lambda - s_\mu = 0$, das ist aber Widerspruch zu $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Basis. $\square$

Korollar[11]: Sei $A \neq 0$ und V endlich erzeugter freier A-Modul. Dann hat jede Basis von A nur endlich viele Elemente.

Beweis: Folgt sofort aus Lemma 3.4.10 und Lemma 3.3.2 (jedes Erzeugendensystem enthält endliches Erzeugendensystem). $\square$

Satz[12]: Sei $A \neq 0$ und V freier A-Modul. Dann haben alle Basen von V die gleiche Kardinalität, und diese ist gleich der minimalen Erzeugendenzahl. Diese Kardinalität heißt der Rang (oder Dimension) von V, geschrieben $\operatorname{rk} V$.

Beweis Betrachte zwei Fälle.
$\mu_A(V) = \infty$: Sei S eine Basis eines freien A-Moduls V mit $\mu_A(V) = \infty$. Wissen, nach Lemma 3.4.10, dass S minimales Erzeugendensystem ist. Lemma 3.3.3 impliziert bereits $|S| = \mu_A(V)$

geht auch für $=\infty$

$\mu_A(V) < \infty$: Sei M maximales Ideal in A. Dann ist $K := A/M$ Körper. Da M Ideal, ist $MV = \{\sum_i m_i v_i \mid m_i \in M, v_i \in V\}$ Untermodul von V. Der A-Modul V/MV ist dann kanonisch A/M-Modul, also K-Vektorraum.
Sei nun $(s_1, \ldots, s_n)$ A-Basis von V. Dann ist $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$ eine K-Basis von V/MV, denn: Dass $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n$ V/MV über K erzeugen, ist klar. Sei andererseits

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{s}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i s_i \in MV$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i s_i = \sum_{i=1}^n m_i s_i \text{ mit } m_i \in M$$

$\Rightarrow a_i = m_i \; \forall i$ da $(s_1, \ldots, s_n)$ Basis $\Rightarrow a_i \in M \; \forall i \Rightarrow \bar{a}_i = 0 \; \forall i$.

Es gilt also $n = \dim_K V/MV$ für alle A-Basen von V. □

Bem: [13] Über dem Nullring $A = 0$ ist $A^{(\Lambda)} = 0$ $\forall$ Mengen Λ, die freien Moduln sind also die Nullmoduln und haben keinen wohldefinierten Rang.

Bem: [14] Über nicht kommutativen Ringen muss das nicht stimmen. Es gibt $A \neq 0$ mit $A^n \simeq A^m$ als A-Moduln für alle $n, m > 0$!

Lemma: [15] Seien V, W freie A-Moduln. Dann ist nach Wahl von Basen

$$\mathrm{Hom}_A(V, W) \simeq \mathrm{Mat}_{\mathrm{rk}V \times \mathrm{rk}W}(A)$$ □

als A-Moduln

Beweis: Wie in der linearen Algebra