Vorlesung 9 (16.11.16)

3.6 Tensorprodukte

Sei A ein Ring und seien V_1, V_2, W A-Moduln.

Def.[1]: Eine Abbildung $f: V_1 \times V_2 \longrightarrow W$ heißt *A-bilinear*, falls sie A-linear in beiden Komponenten ist, d.h.

$$f(v_1, -): V_2 \to W \quad A\text{-linear } \forall v_1 \in V_1$$
$$f(-, v_2): V_1 \to W \quad A\text{-linear } \forall v_2 \in V_2$$

Es sei $\mathrm{Bil}_A(V_1, V_2; W)$ die Menge dieser Abbildungen.

Frage[2]: Gibt es A-Modul T, sodass $\mathrm{Bil}_A(V_1, V_2; W) \simeq \mathrm{Hom}_A(T, W)$?

Satz[3]: Ja! Präziser: Seien V_1, V_2 zwei A-Moduln. Dann gibt es ein Paar (T, τ) bestehend aus einem A-Modul T und einer A-bilinearen Abbildung

$$\tau: V_1 \times V_2 \longrightarrow T \quad \text{(die "universelle bilineare Abbildung")}$$

sodass gilt:

a) Ist W ein A-Modul und $f \in \mathrm{Bil}_A(V_1, V_2; W)$, so gibt es einen eindeutigen Morphismus $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(T, W)$ sodass

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\tilde{f}"] & W \\ V_1 \times V_2 \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

b) (T, τ) ist universell, d.h. ist (T', τ') ein anderes Paar mit obiger Eigenschaft, so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $j: T \xrightarrow{\sim} T'$

sodass

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "j", "\sim"'] & & T' \\ & V_1 \times V_2 \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\tau'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

<u>Beweis:</u>

a) Sei

$$C := A^{(V_1 \times V_2)} = \bigoplus_{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2} A.$$

Das ist der freie A-Modul mit Basis $V_1 \times V_2$. Ein Element von C ist also von der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (v_{1i}, v_{2i}) \quad , \quad a_i \in A, \; v_{1i} \in V_1, \; v_{2i} \in V_2.$$

Sei nun D der durch folgende Elemente erzeugte Untermodul von C:

$$(v_1 + v_1', v_2) - (v_1, v_2) - (v_1', v_2) \quad , \quad v_1, v_1' \in V_1, \; v_2 \in V_2$$

$$(v_1, v_2 + v_2') - (v_1, v_2) - (v_1, v_2') \quad , \quad v_1 \in V_1, \; v_2, v_2' \in V_2$$

$$(a v_1, v_2) - a (v_1, v_2) \quad , \quad a \in A, \; v_1 \in V_1, \; v_2 \in V_2$$

$$(v_1, a v_2) - a (v_1, v_2) \quad , \quad a \in A, \; v_1 \in V_1, \; v_2 \in V_2.$$

Sei dann $T := C/D$. Für das Bild des Basiselements $(v_1, v_2) \in C$ in T schreiben wir $v_1 \otimes v_2$. Dann wird T von diesen Elementen erzeugt und es gilt

$$(v_1+v_1')\otimes v_2 = v_1\otimes v_2 + v_1'\otimes v_2$$
$$v_1\otimes(v_2+v_2') = v_1\otimes v_2 + v_1\otimes v_2'$$
$$(av_1)\otimes v_2 = a(v_1\otimes v_2) = v_1\otimes(av_2).$$

Die Abbildung $\tau: V_1\times V_2 \to T$, $(v_1,v_2)\mapsto v_1\otimes v_2$, ist also bilinear.
Ist nun $f\in Bil_A(V_1,V_2;W)$, so ist erhalten wir eindeutigen A-Modul morphismus

$$f': C\to W$$
$$f'((v_1,v_2)) := f(v_1,v_2)$$
(auf Basis von C definiert)

und da f Bilinear, ist $D\subseteq \operatorname{Ker} f'$, wir erhalten also A-Modul-morphismus

$$\tilde f: T\to W$$
$$v_1\otimes v_2 \mapsto f(v_1,v_2)$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\tilde f"] & W \\ V_1\times V_2 \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert also. Die Abbildung $\tilde f$ ist dadurch auch eindeutig festgelegt.
Ist andererseits $\tilde f\in Hom_A(T,W)$, so ist $\tilde f\circ\tau\in Bil_A(V_1,V_2;W)$.
Wir haben also

$$Bil_A(V_1,V_2;W)\simeq Hom_A(T,W).$$

b) Haben $\tau'\in Bil_A(V_1,V_2;T')$. Es existiert also eindeutiges $j\in Hom_A(T,T')$ sodass

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j"] & T' \\ V_1\times V_2 \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "\tau'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Andererseits ist $\tau \in Bil_A(V_1, V_2; T)$, es existiert also eindeutiges $j' \in Hom_A(T', T)$ sodass

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "j'"] & T \\ V_1 \times V_2 \arrow[u, "\tau'"] \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann kommutiert auch

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j"] & T' \arrow[r, "j'"] & T \\ & V_1 \times V_2 \arrow[ul, "\tau"] \arrow[u, "\tau'"] \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow j'j\tau = \tau$

$\Rightarrow j'j(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2$

$\Rightarrow j'j = id$

Und analog $jj' = id$. Also j, j Isomorphismen. $\square$

<u>Def</u>[4]: Man nennt T aus dem Satz das Tensorprodukt von V_1 und V_2, und schreibt dafür $V_1 \otimes_A V_2$, oder kurz $V_1 \otimes V_2$ wenn A klar ist.

<u>Bem</u>[5]: Die Elemente $v_1 \otimes v_2$ nennt man (elementare) Tensoren.
Ganz wichtig: Ein beliebiges Element von $V_1 \otimes V_2$ ist nicht von der Form $v_1 \otimes v_2$, sondern eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} v_{1i} \otimes v_{2i}$ solcher Elemente.

<u>Bem</u>[6]: Man kann analog multilineare Abbildungen $V_1 \times .. \times V_n \to W$ betrachten. Dazu kann man auch wieder ein Tensorprodukt $V_1 \otimes .. \otimes V_n$ konstruieren mit

$$Mult(V_1, .., V_n; W) \simeq Hom_A(V_1 \otimes .. \otimes V_n, W).$$

Lemma[7]: Seien V_1, V_2, V_3 A-Moduln. Dann existieren kanonische Isomorphismen.

a) $V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$, $v_1 \otimes v_2 \to v_2 \otimes v_1$ kommutativ

b) $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ assoziativ

$(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$

c) $(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3)$, $(v_1, v_2) \otimes v_3 \mapsto (v_1 \otimes v_3, v_2 \otimes v_3)$ distributiv

d) $A \otimes V_1 \xrightarrow{\sim} V_1$, $a \otimes v_1 \mapsto a v_1$. (A ist Einheit bzgl $\otimes_A$)

Beweis:

Achtung: Alle Abbildungen sind nur auf A-Modulerzeugern definiert. Wir müssen linear fortsetzen und da die Tensoren Äquivalenzklassen sind, auch Wohldefiniertheit prüfen!

Betrachten jetzt nur $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$, Rest geht analog.

Die Abbildung $f: V_1 \times V_2 \to V_2 \otimes V_1$, $(v_1, v_2) \mapsto v_2 \otimes v_1$ ist bilinear. Bekommen also eindeutigen Morphismus

$$\tilde{f}: V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1 \text{ mit } \tilde{f}(v_1 \otimes v_2) = f(v_1, v_2) = v_2 \otimes v_1.$$

Analog erhalten wir einen eindeutigen Morphismus

$$\tilde{g}: V_2 \otimes V_1 \to V_1 \otimes V_2 \text{ mit } \tilde{g}(v_2 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_2.$$

Offensichtlich gilt $\tilde{f}\tilde{g} = id$ und $\tilde{g}\tilde{f} = id$. $\square$

Lemma[8]: Sei V ein A-Modul. Ein Morphismus $f: W \to W'$ von A-Moduln induziert einen Morphismus

$$V \otimes_A f: V \otimes_A W \longrightarrow V \otimes_A W'$$
$$v \otimes w \longmapsto v \otimes f(w)$$

von A-Moduln. $\rightsquigarrow V \otimes_A - : Mod(A) \to Mod(A)$ ist Funktor.

Beweis: Die Abbildung $V \times W \to V \otimes_A W'$, $(v,w) \mapsto v \otimes f(w)$, ist bilinear und induziert damit den angegebenen Morphismus. □

3.7 Skalarerweiterung:

Erinnerung[1]: Ist $\varphi: A \to B$ Ringmorphismus und W ein B-Modul, so erhalten wir A-Modulstruktur auf W durch $aw := \varphi(a)w$.

$\rightsquigarrow$ Funktor $(-)_A : Mod(B) \to Mod(A)$.

Jetzt in die umgekehrte Richtung. Beachte, dass insbesondere B ein A-Modul mittels φ.

Lemma[2]: Sei $\varphi: A \to B$ ein Ringmorphismus und V ein A-Modul. Dann gibt es auf dem A-Modul $V^B := B \otimes_A V$ eine eindeutige B-Modulstruktur mit

$$b(b' \otimes v) = bb' \otimes v.$$

Ist $f: V \to W$ ein A-Modulmorphismus, so gibt es einen eindeutigen B-Modulmorphismus $V^B \to W^B$, $b \otimes v \mapsto b \otimes f(v)$.
$\rightsquigarrow$ Funktor $(-)^B : Mod(A) \to Mod(B)$.

Beweis: Klar (Übung). □

Bem[3]: Genauer müsste man $B\otimes_\varphi V$ schreiben, aber das macht niemand.
Ist A Unterring von B, so betrachtet man meist für $B\otimes_A V$ die Inklusion $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$.

3.8 Flache Moduln

Viele Konzepte in der kommutativen Algebra sind durch Geometrie motiviert. "Flachheit" ist eins der wenigen Konzepte, das rein algebraisch motiviert ist (für alle geometrischen Beschreibungen davon gibt es irgendein Gegenbeispiel).

Lemma[1]: Sei V ein A-Modul und sei $W' \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} W'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist auch die durch Anwenden von $V\otimes_A -$ induzierte Sequenz

$$V\otimes_A W' \xrightarrow{V\otimes_A f} V\otimes_A W \xrightarrow{V\otimes_A g} V\otimes_A W'' \longrightarrow 0$$

exakt, d.h. $V\otimes_A -$ ist rechts-exakt.

Beweis:
Sei $\varphi := V\otimes_A f$, d.h. $\varphi(v\otimes w') = v\otimes \varphi(w')$ und $\psi := V\otimes_A g$, $\psi(v\otimes w) = v\otimes \psi(w)$.

(1) $\operatorname{Im}\psi = \ker(V\otimes_A W' \to 0) = V\otimes_A W'$, d.h. ψ surjektiv

Sei $\sum_{i=1}^n a_i(v_i\otimes w_i'') \in V\otimes_A W''$. Da g surjektiv (wegen Exaktheit), gibt es $w_i \in W$ mit $g(w_i) = w_i''$. Nun gilt

$$\psi\Big(\sum_i a_i(v_i\otimes w_i)\Big) = \sum_i a_i(v_i\otimes g(w_i)) = \sum_i a_i(v_i\otimes w_i'')$$

Also ψ surjektiv.

② $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$:

$\psi \circ \varphi(v \otimes w') = \psi(v \otimes f(w')) = v \otimes gf(w') = 0$ da $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$

Dann ist auch $\psi \circ \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (v_i \otimes w_i')\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$.

③ $\operatorname{Im}\varphi \supseteq \operatorname{Ker}\psi$:

Achtung: Es genügt nicht, nur $\psi(v \otimes w) = 0 \Rightarrow v \otimes w \in \operatorname{Im}\varphi$ zu zeigen!

Zeigen das wie folgt: Da $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$ nach ②, induziert ψ Morphismus

$$V \otimes_A W / \operatorname{Im}\varphi \xrightarrow{\overline{\psi}} V \otimes_A W''$$

Dieses ist surjektiv, da ψ surjektiv nach ①. Können wir zeigen, dass $\overline{\psi}$ Isomorphismus, so folgt ${}^{\operatorname{Im}\varphi}/_{\operatorname{Im}\varphi} = \operatorname{Ker}\overline{\psi} = \operatorname{Ker}\psi/_{\operatorname{Im}\varphi}$, also $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.

Konstruiere Inverses zu $\overline{\psi}$ wie folgt. Für $(v, w'') \in V \times W''$ wähle $w \in W$ mit $g(w) = w''$ (g surjektiv). Das gibt Abbildung

$$V \times W'' \longrightarrow V \otimes_A W / \operatorname{Im}\varphi, \quad (v, w'') \longmapsto \overline{(v \otimes w)}.$$

Ist wohldefiniert, denn sei $w_1, w_2 \in W$ mit $g(w_1) = w'' = g(w_2)$

$\Rightarrow w_1 - w_2 \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \Rightarrow v \otimes (w_1 - w_2) \in \operatorname{Im}\varphi$

$\Rightarrow \overline{v \otimes w_1} = \overline{v \otimes w_2}$

Die Abbildung oben ist bilinear, induziert also $\eta : V \otimes_A W'' \longrightarrow V \otimes_A W / \operatorname{Im}\varphi$

Nun gilt:

a) $\overline{\psi} \circ \eta(v \otimes w'') = \overline{\psi}(\overline{v \otimes w}) = v \otimes g(w) = v \otimes w''$ (nach Def von w)

$\Rightarrow \overline{\psi}\eta\left(\sum_i a_i v_i \otimes w_i''\right) = \sum_i a_i v_i \otimes w_i''$

b) $\eta\overline{\Psi}\left(\overline{v\otimes w}\right) = \eta\left(v\otimes g(w)\right) = \overline{v\otimes w}$, da $w \in g^{-1}(g(w))$

$\Rightarrow \eta\overline{\Psi}\left(\overline{\sum_i a_i v_i \otimes w_i}\right) = \overline{\sum_i a_i v_i \otimes w_i}$,

$\square$