3.8

# Vorlesung 10 (18.11.16)

Rechts-Exaktheit von $V\otimes_A -$ heißt insbesondere: Ist $f: W \to W''$ surjektiv, so ist auch $V\otimes_A f: V\otimes_A W \to V\otimes_A W'$ surjektiv.

Bsp.[2] $V\otimes_A -$ ist nicht exakt. z.B. $A=\mathbb{Z}$ und die Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

wobei $\mu$ Multiplikation mit $n>1$. Tensorieren mit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} -$ gibt exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes\mu} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Aber $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes\mu$ ist nicht injektiv: $\bar{1}\otimes 1 \longmapsto \bar{1}\otimes n = n(\bar{1}\otimes 1) = \bar{n}\otimes 1 = 0$

Def.[3] Ein $A$-Modul $V$ heißt flach, falls für jede exakte Sequenz von $A$-Moduln $0\to W'\to W\to W''\to 0$ die induzierte Sequenz

$$0 \to V\otimes_A W' \longrightarrow V\otimes_A W \longrightarrow V\otimes_A W'' \longrightarrow V\otimes_A W \to 0$$

ebenfalls exakt ist.

Bsp.[4] Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n>1$, ist nicht flach. Das Problem ist Torsion:

Lemma[5]: Flache Moduln sind torsionsfrei.

Beweis: Ist $a\in A$ Nicht-Nullteiler, so ist die Abbildung $\mu_a: A\to A$, $a'\mapsto aa'$, injektiv. Ist nun $V$ flacher $A$-Modul, so ist auch

$$\begin{array}{ccccc} V\otimes_A\mu_a: & V\otimes_A A & \longrightarrow & V\otimes_A A \\ & \parallel & & \parallel \\ & V & & V \\ & v & \longmapsto & av \end{array}$$

injektiv. Also ist $V$ torsionsfrei. $\square$

<u>Lemma</u>[6]: Freie Moduln sind flach.

<u>Beweis:</u> Sei $V$ freier $A$-Modul. Dann ist $V \simeq A^{(\Lambda)}$ für eine Menge $\Lambda$. Ist nun $0 \to W' \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} W'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz, so erhalten wir die Sequenz

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & V \otimes W' & \longrightarrow & V \otimes W & \longrightarrow & V \otimes W'' & \longrightarrow & 0 \\
& \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & \\
0 \to & A^{(\Lambda)} \otimes W' & \longrightarrow & A^{(\Lambda)} \otimes W & \longrightarrow & A^{(\Lambda)} \otimes W'' & \longrightarrow & 0 \\
& \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & \\
0 \to & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes W') & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes W) & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes W'') & \longrightarrow & 0 \\
& \wr\wr & & \wr\wr & & & & \\
0 \to & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W' & \xrightarrow{\bigoplus_\lambda f} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W & \xrightarrow{\bigoplus_\lambda g} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W'' & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

und die unterste Sequenz ist exakt (da komponentenweise immer die Ausgangssequenz). $\square$

Wir haben nun eine Hierarchie:

$$\text{freie Moduln} \subsetneq \text{flache Moduln} \subsetneq \text{torsionsfreie Moduln}$$

In der Übung wird das noch um projektive Moduln verfeinert.

# 4. Lokalisierung

Idee: Einen Ring künstlich Inverse hinzufügen.

## 4.1 Quotientenkörper

Frage[1]: Was ist $\mathbb{Q}$ ?
Antwort[2]: $\mathbb{Q}$ ist der kleinste Körper, in den $\mathbb{Z}$ einbettet. $\mathbb{Q}$ entsteht aus $\mathbb{Z}$ durch Hinzufügen eines Inversen $\frac{1}{n}$ zu jedem $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ mit den üblichen Rechenregeln.
Diese Konstruktion lässt sich für jeden Integritätsbereich durchführen.

Lemma[3]: Sei $A$ ein Integritätsbereich. Definiere auf $A \times (A \setminus \{0\})$ die Relation $\sim$ durch

$$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow at = bs \quad \left(\text{d.h. } \frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow at = bs\right)$$

Dies ist Äquivalenzrelation. Schreiben wir $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse von $(a,s)$, so wird $Q(A) := (A \times (A\setminus\{0\}))/\sim$ zu einem Ring durch

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

$Q(A)$ ist Körper $\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = 1\right)$ und die Abbildung $j: A \to Q(A), a \mapsto \frac{a}{1}$, ist injektives Ringmorphismus.

Beweis: Direktes Nachrechnen (wohldefiniert + Ringeigenschaft). $\square$

Def[4]: Man nennt $Q(A)$ den Quotientenkörper von $A$. (Wird auch als $\mathrm{Frac}(A)$ oder $\mathrm{Quot}(A)$ geschrieben).

**Bsp[5]:**

a) $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

b) $Q(K) \simeq K$ falls $K$ bereits Körper

c) Ist $K$ ein Körper, so ist $K[X]$ Integritätsbereich und

$$K(X) := Q(K[X]) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f,g \in K[X], g \neq 0 \right\}$$

ist der rationale Funktionenkörper über $K$.
(Analog in mehreren Variablen).

d) Ist $A$ ein Ring und $P \in \operatorname{Spec} A$, so ist $A/P$ Integritätsbereich und daher ist

$$k_A(P) := k(P) := Q(A/P)$$

definiert. Dies ist der Restklassenkörper von $A$ in $P$.
Ist $M \in \operatorname{Max} A$, so ist natürlich $k_A(M) = A/M$.

z.B. $k_{\mathbb{Z}}(0) = \mathbb{Q}$, $k_{\mathbb{Z}}((p)) = \mathbb{F}_p$

$$k_{\mathbb{Z}[X]}(X) = \mathbb{Q}, \quad k_{\mathbb{Z}[X]}((p)) = \mathbb{F}_p(X)$$

**Lemma[6] (Universelle Eigenschaft):** Ist $h: A \hookrightarrow K$ eine Einbettung in einen Körper, dann gibt es eindeutigen Ringmorphismus $\tilde{h}: Q(A) \to K$ (automatisch injektiv) mit

$$\begin{tikzcd} Q(A) \arrow[r, hook, "\tilde{h}"] & K \\ A \arrow[u, hook, "j"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

d.h. $Q(A)$ ist minimal.

**Beweis:** Es gilt

$$\tilde{h}\left(\frac{a}{s}\right) = \tilde{h}\left(\frac{a}{1}\cdot\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = \tilde{h}\left(\frac{a}{1}\right)\cdot\tilde{h}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = \tilde{h}j(a)\cdot(\tilde{h}j(s))^{-1}$$

$$= h(a)\cdot h(s)^{-1} \Rightarrow \tilde{h} \text{ eindeutig bestimmt.}$$

$\tilde{h}$ so definiert ist in der Tat auch Ringmorphismus. $\square$

## 4.2 Lokalisierung von Ringen

Hat $A$ Nullteiler, so kann $A$ nicht in einen Körper eingebettet werden, d.h. obige Konstruktion funktioniert nicht. Man kann das aber verallgemeinern. Ang $S \subseteq A$ und wir wollen die Elemente aus $S$ invertieren. Das soll wieder minimal geschehen:

**Def**[1]: Die Lokalisierung von $A$ in $S \subseteq A$ ist ein Ring $S^{-1}A$ zusammen mit einem Morphismus $j: A \to S^{-1}A$, sodass

a) $j(S) \subseteq (S^{-1}A)^\times$

b) Ist $h: A \to B$ ein Ringmorphismus mit $h(S) \subseteq B^\times$, so gibt es eindeutigen Ringmorphismus $\tilde{h}: S^{-1}A \to B$ mit

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A \arrow[r, "\tilde{h}"] & B \\ A \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

**Lemma**[2]: Die Lokalisierung existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutig.

<u>Beweis</u> Eindeutigkeit folgt aus universeller Eigenschaft.
Zunächst eine Beobachtung: Angenommen, $S^{-1}A$ existiert. Sind $s,t \in S$, so ist $j(s), j(t) \in (S^{-1}A)^\times$ und daher auch $j(st) = j(s)j(t) \in (S^{-1}A)^\times$. Weiterhin ist $1 = j(1) \in (S^{-1}A)^\times$. Es ist daher $S^{-1}A = \overline{S}^{-1}A$, wobei $\overline{S}$ der multiplikative Abschluss von $S$ ist, d.h. die kleinste Teilmenge $\overline{S} \subseteq A$ mit $S \subseteq \overline{S}$, $1 \in \overline{S}$ und $s,t \in \overline{S} \Rightarrow st \in \overline{S}$.

Definiere nun Relation $\sim$ auf $A \times \overline{S}$ durch

$$(a,s) \sim (b,t) \iff atu = bsu \quad \text{für ein } u \in \overline{S}.$$

Dies ist Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch klar. Transitiv:

$$(a,s) \sim (b,t), \quad (b,t) \sim (c,u)$$
$$\Rightarrow \exists\, v,w \in \overline{S} \text{ mit } atv = bsv, \quad buw = ctw$$
$$\Rightarrow atvuw = bsvuw, \quad buwsv = ctwsv$$
$$\Rightarrow atvuw = ctwsv \Rightarrow au\,tvw = cs\,tvw.$$

Da $\overline{S}$ multiplikativ abgeschlossen, gilt $tvw \in \overline{S} \Rightarrow (a,s) \sim (c,u)$
Definiere $S^{-1}A := (A \times \overline{S})/\sim$ und schreibe $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse von $(a,s)$. Dann wird $S^{-1}A$ zu einem Ring durch

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Zusammen mit dem Morphismus $j: A \to S^{-1}A$ gilt die universelle Eigenschaft. $\square$

Bsp.[3]

a) Ist $A$ Integritätsbereich, so ist $S = A\setminus\{0\}$ multiplikativ abgeschlossen und $S^{-1}A = Q(A)$.

b) Fundamentales Beispiel: Sei $P \in \operatorname{Spec} A$. Dann ist $S_P := A \setminus P$ multiplikativ abgeschlossen. Man nennt

$$A_P := S_P^{-1} A$$

die Lokalisierung von $A$ in $P$.

z.B. $p$ Primzahl. Dann ist

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{s} \;\middle|\; s \text{ koprim zu } p \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

c) $S^{-1}A = 0 \iff 0 \in \overline{S}$

d) Ist $f \in A$, so definieren wir

$$A_f := \{f\}^{-1}A = \overline{\{f\}}^{-1}A = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}^{-1}A = \left\{ \frac{a}{f^n} \,;\, a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$