4.2

Vorlesung 11 (23.11.16)

Def[4]: Ein Epimorphismus in einer Kategorie C ist ein Morphismus $f: X \to Y$, sodass jedes Diagramm

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} Z \qquad \text{d.h.} \quad g_1 f = g_2 f$$

bereits $g_1 = g_2$ impliziert, d.h. f ist rechts-kürzbar. Analog ist ein Monomorphismus ein links-kürzbarer Morphismus.

Bsp[5]:

a) In Set sind Monomorphismen = injektive Abbildungen
Epimorphismen = surjektive Abbildungen

b) In Grp sind Monos = injektive Gruppenmorphismen
Epis = surjektive Gruppenmorphismen (nicht trivial!)

c) In CRing sind Monos = injektive Ringmorphismen
Epis $\supsetneq$ surjektive Ringmorphismen,

z.B. ist $f: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epi: $\mathbb{Q} \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} B$ mit $g_1 f = g_2 f$

$$\Rightarrow g_1(n) = g_2(n) \ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow g_1(m^{-1}) = g_2(m^{-1}) \ \forall 0 \neq m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow g_1\left(\tfrac{n}{m}\right) = g_2\left(\tfrac{n}{m}\right) \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Dieses Beispiel allgemeiner:

Lemma[6]: $j: A \to S^{-1}A$ ist ein Epimorphismus in CRing. $\square$

Lemma[7]: Seien $S \subseteq T \subseteq A$. Dann ist $T^{-1}A \cong j_S(T)^{-1}(S^{-1}A)$, wobei $j_S: A \to S^{-1}A$ (d.h. Lokalisierung ist transitiv).

Beweis: Siehe Übung $\square$

Lemma[8]: Es ist

$$\mathrm{Ker}(j : A \to S^{-1}A) = \bigcup_{s \in \overline{S}} \mathrm{Ann}_A(s) = \{a \in A \mid sa = 0 \text{ für ein } s \in \overline{S}\}.$$

Beweis: Sei $sa = 0 \Rightarrow 0 = j(sa) = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \Rightarrow 0 = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{1} = \frac{a}{1} = j(a)$
$\Rightarrow a \in \mathrm{Ker}(j)$.
Sei andererseits $j(a) = 0$, d.h. $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ in $S^{-1}A$.
Dann $\exists u \in \overline{S}$ mit $a \cdot 1 \cdot u = 0 \cdot 1 \cdot u = 0$, also $au = 0$ $\square$

Korollar[9]: Ist A Integritätsbereich, so ist $j : A \to S^{-1}A$ injektiv.
Es gilt

$$A \hookrightarrow S^{-1}A \hookrightarrow (A \setminus \{0\})^{-1}A = Q(A)$$

Sind $P, Q \in \mathrm{Spec}\, A$ mit $P \subseteq Q$, so gilt

$$A \subseteq (A \setminus Q)^{-1}A = A_Q \subseteq (A \setminus P)^{-1}A = A_P \subseteq Q(A). \quad \square$$

Bsp[10]: Sei A ein Ring. Die Menge $S \subseteq A$ der Nicht-Nullteiler ist multiplikativ abgeschlossen. Man nennt $Q(A) := S^{-1}A$ den *totalen Quotientenring* von A.
Der Morphismus $j : A \to Q(A)$ ist injektiv.

Lemma[11]: Sei $S \subseteq A$. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ideals}_S(A) := \{I \trianglelefteq A \mid \text{jedes } s \in \overline{S} \text{ ist Nicht-Nullteiler in } A/I\} & \rightleftarrows & \mathrm{Ideals}(S^{-1}A) \\ I & \longmapsto & j(I)S^{-1}A =: IS^{-1}A \\ j^{-1}(J) & \longleftarrow & J \end{array}$$

↖ das von $j(I)$ erzeugte Ideal in $S^{-1}A$.

paarweise inverse inklusionserhaltende Abbildungen, die weiterhin Primideale auf Primideale abbilden

Es ist dann $\mathrm{Spec}_S(A) := \{P \in \mathrm{Spec}\,A \mid P \cap \bar{S} = \emptyset\} \simeq \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ als topologische Räume.

Beweis:

Wissen, dass $J \mapsto j^{-1}(J)$ eine Abbildung $\mathrm{Ideals}(S^{-1}A) \to \mathrm{Ideals}(A)$ ist.
Sei $a \in A$ und $s \in \bar{S}$ mit $\overline{as} = 0 \in A/j^{-1}(J)$, dh $as \in j^{-1}(J)$. Dann ist $\frac{as}{1} = j(as) \in J \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{as}{1} \in J \Rightarrow a \in j^{-1}(J)$. Also ist $j^{-1}(J) \in \mathrm{Ideals}_S(A)$.
Haben nun wohldefinierte Abbildungen zwischen $\mathrm{Ideals}_S(A)$ und $\mathrm{Ideals}(S^{-1}A)$.

a) Beh: Sei $J \trianglelefteq S^{-1}A$. Dann ist $j(j^{-1}(J))S^{-1}A = J$.
Bew. $J \supseteq j(j^{-1}(J))S^{-1}A$ ist klar. Sei andererseits $\frac{a}{s} \in J \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{as}{1} \in J$
$\Rightarrow a \in j^{-1}(J) \Rightarrow \frac{a}{1} \in j(j^{-1}(J)) \Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} \in j(j^{-1}(J))S^{-1}A$.

b) Beh: Sei $I \in \mathrm{Ideals}_S(A)$. Dann ist $j^{-1}(j(I)S^{-1}A) = I$.
Bew: $I \subseteq j^{-1}(j(I)S^{-1}A)$ ist klar. Sei andererseits $a \in j^{-1}(j(I)S^{-1}A)$

$$\Rightarrow \frac{a}{1} \in j(I)S^{-1}A.$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{1} \cdot \frac{a_i}{s_i}, \quad c_i \in I,\ a_i \in A,\ s_i \in \bar{S}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i s_i' a_i}{s}, \quad s_i' := s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_n, \quad s := s_i s_i' \in \bar{S}$$

$$= \frac{c}{s} \text{ für ein } c \in I,\ s \in \bar{S}$$

$$\Rightarrow \exists\, u \in \bar{S} \text{ mit } a \underbrace{su}_{\in \bar{S}} = cu \in I \Rightarrow a \in I, \text{ da } I \in \mathrm{Ideals}_S(A).$$

c) Für $J \trianglelefteq S^{-1}A$ induziert $j: A \to S^{-1}$ einen Isomorphismus $A/j^{-1}(J) \simeq S^{-1}A/J$.
$\Rightarrow$ Abbildungen schränken sich zu Bijektionen zwischen Primidealen ein.
Es ist $\mathrm{Spec}\,A \cap \mathrm{Ideals}_S(P) = \mathrm{Spec}_S(A)$. Haben also Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} P & \longmapsto & j(P)S^{-1}A \\ \mathrm{Spec}_S(A) & \underset{j^*}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} & \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \\ j^{-1}(Q) & \longleftarrow\!\!\shortmid & Q \end{array}$$

Wir wissen, dass j^* stetig sei. Für die Stetigkeit von φ sei $Z \subseteq \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ abgeschlossen, d.h. $Z = V(J)$ für ein $J \trianglelefteq S^{-1}A$. Sei $I := j^{-1}(J) \in \mathrm{Ideals}_S(A)$.
Es ist

$$\varphi^{-1}(Z) = \{ j^{-1}(Q) \mid Q \supseteq J \} = V(I) \cap \mathrm{Spec}_S(A)$$

abgeschlossen in $\mathrm{Spec}_S(A)$. $\square$

Die Idealtheorie von $S^{-1}A$ ist also ein Ausschnitt/Vereinfachung der Idealtheorie von A.

__Korollar__[12]: Ist $P \in \mathrm{Spec}\,A$, so ist $A_P = (A \setminus P)^{-1}A$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $PS^{-1}A$. Es ist $\mathrm{Spec}\,A_P \simeq \{ Q \in \mathrm{Spec}\,A \mid Q \subseteq P \}$.

__Beweis:__ Nach Lemma 4.2.11 ist

$$\mathrm{Spec}\,A_P \simeq \{ Q \in \mathrm{Spec}\,A \mid Q \cap (A \setminus P) = \emptyset \} = \{ Q \in \mathrm{Spec}\,A \mid Q \subseteq P \}$$

Das zeigt sofort die Behauptung. $\square$

__Lemma__[13]: Sind $Q, P \in \mathrm{Spec}\,A$ mit $Q \subseteq P$, so ist kanonisch

$$(A_P)_{QA_P} \simeq A_Q$$

__Beweis:__ Einfach Transitivität der Lokalisierung anwenden. $\square$

4.3 Lokalisierung von Moduln

Sei $S \subseteq A$. Die Konstruktion von $S^{-1}A$ kann analog für einen A-Modul V durchgeführt werden: Definiere $S^{-1}V$ als $V \times \overline{S}$ modulo der Äquivalenzrelation

$$(v,s) \sim (w,t) \Leftrightarrow \exists u \in \overline{S} \text{ mit } vtu = wsu.$$

Schreiben $\frac{v}{s}$ für die Klasse von (v,s). Bekommen A-Modulstruktur auf $S^{-1}V$ durch

$$a \cdot \frac{v}{s} := \frac{av}{s}, \quad \frac{v}{s} + \frac{w}{t} = \frac{vt + ws}{st}.$$

Die Abbildung $j: V \to S^{-1}V$ ist A-Modulmorphismus.

Bem:[1] Offensichtlich: "S^{-1}(A als A-Modul)" = "S^{-1}(A als Ring) als A-Modul"
Die Idealkorrespondenz $\mathrm{Ideals}_S(A) \simeq \mathrm{Ideals}(S^{-1}A)$ verallgemeinert sich analog zu Korrespondenz $\mathrm{Submodules}_S(V) \simeq \mathrm{Submodules}(S^{-1}V)$. Ebenfalls analog:

Lemma:[2] $\ker(j: V \to S^{-1}V) = \{v \in V \mid sv = 0 \text{ für ein } s \in \overline{S}\}$ $\square$

Korollar:[3] Ist V torsionsfrei, so ist $j: V \to S^{-1}V$ injektiv. $\square$

Achtung: $j: V \to S^{-1}V$ im Allgemeinen kein Epimorphismus ($\Leftrightarrow$ surjektiv) in $\mathrm{Mod}(A)$.

$S^{-1}V$ ist auch $S^{-1}A$-Modul durch

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{v}{t} = \frac{av}{st}.$$

Ist $f: V \to W$ ein A-Modulmorphismus, so erhalten wir $S^{-1}A$-Modulmorphismus

$$S^{-1}f: S^{-1}V \to S^{-1}W, \quad \frac{v}{s} \longmapsto \frac{f(v)}{s}$$

$\rightsquigarrow S^{-1}: \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(S^{-1}A)$ ist Funktor.

<u>Lemma:</u>[4] Die Funktoren $S^{-1}A\otimes_A -$ und S^{-1} sind äquivalent, d.h. für jeden A-Modul V existiert ein $S^{-1}A$-Modulisomorphismus

$$\varphi_V : S^{-1}A\otimes_A V \xrightarrow{\sim} S^{-1}V$$

sodass wir für jeden A-Modulmorphismus $f: V\to W$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A\otimes_A V \arrow[r, "\varphi_V", "\sim"'] \arrow[d, "S^{-1}A\otimes_A f"'] & S^{-1}V \arrow[d, "S^{-1}f"] \\ S^{-1}A\otimes_A W \arrow[r, "\sim", "\varphi_W"'] & S^{-1}W \end{tikzcd}$$

haben.

<u>Beweis:</u> Die Abbildung $S^{-1}A\times V \to S^{-1}V$, $(\frac{a}{s}, v)\mapsto \frac{av}{s}$, ist A-bilinear, induziert also A-Modulmorphismus $\varphi_V : S^{-1}A\otimes_A V \to S^{-1}V$, $\frac{a}{s}\otimes v \mapsto \frac{av}{s}$. Dieser ist offensichtlich auch $S^{-1}A$-linear. Die Abbildung $\psi_V : S^{-1}V \to S^{-1}A\otimes_A V$, $\frac{v}{s}\mapsto \frac{1}{s}\otimes v$, ist offensichtlich der Umkehrmorphismus. Es gilt

$$\begin{tikzcd} \frac{a}{s}\otimes v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \frac{av}{s} \arrow[ddd, mapsto] \\ & S^{-1}A\otimes_A V \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "S^{-1}A\otimes_A f"] & S^{-1}V \arrow[d, "S^{-1}f"'] & \\ & S^{-1}A\otimes_A W \arrow[r, "\varphi_W"'] & S^{-1}(W) & \\ \frac{a}{s}\otimes f(v) \arrow[rrr, mapsto] & & & \frac{a f(v)}{s} \end{tikzcd}$$

$\square$