4.3

Vorlesung 12 (25.11.16)

Lemma:[5] Der Funktor $S^{-1}: Mod(A) \to Mod(S^{-1}A)$ ist exakt, d.h. $S^{-1}A$ ist flacher A-Modul.

Beweis: Sei $V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V''$ eine exakte Sequenz von A-Moduln.
Es gilt $S^{-1}g \circ S^{-1}f(\frac{v'}{s}) = S^{-1}g(\frac{f(v')}{s}) = \frac{gf(v')}{s} = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} S^{-1}f \subseteq \operatorname{Ker} S^{-1}g$
Sei andererseits $\frac{v}{s} \in \operatorname{Ker} S^{-1}g$, d.h.

$$\frac{g(v)}{s} = 0 = \frac{0}{1} \Rightarrow \exists u \in S \text{ mit } g(v)u = 0$$

Da g A-Modulmorphismus, ist $0 = g(v)u = g(uv)$, d.h. $uv \in \operatorname{Ker} g$.
Wegen Exaktheit existiert $v' \in V'$ mit $uv = f(v')$. Also ist

$$\frac{v}{s} = \frac{uv}{su} = \frac{f(v')}{su} = S^{-1}f\left(\frac{v'}{su}\right) \in \operatorname{Im} S^{-1}f.$$

□

Korollar:[6] Ist $U \subseteq V$ Untermodul, so ist $S^{-1}U \to S^{-1}V$ injektiv, man kann also $S^{-1}U$ als Untermodul von $S^{-1}V$ betrachten. □

Lemma:[7] Sind V, W zwei A-Moduln und $S \subseteq A$, so ist kanonisch

$$S^{-1}V \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}W \simeq S^{-1}(V \otimes_A W)$$

als $S^{-1}A$-Moduln.

Beweis: Die Abbildung $S^{-1}V \times S^{-1}W \to S^{-1}(V \otimes_A W)$, $(\frac{v}{s}, \frac{w}{t}) \mapsto \frac{v \otimes w}{st}$,
ist $S^{-1}A$-bilinear, induziert daher einen Morphismus
$\varphi: S^{-1}V \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}W \to S^{-1}(V \otimes_A W)$.

Surjektivität: Ein beliebiges Element von $S^{-1}(V \otimes_A W)$ ist von der Form $\frac{\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i}{s}$.

Es ist $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{s} \otimes \frac{w_i}{1}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i}{s}$, also φ surjektiv.

Injektivität: Sei $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{s_i} \otimes \frac{w_i}{t_i}\right) = 0$, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i \otimes w_i}{s_i t_i} = 0 \in S^{-1}(V \otimes_A W)$.

Sei $u_i := s_1 t_1 \cdots s_{i-1} t_{i-1} s_{i+1} t_{i+1} \cdots s_n t_n$ und $u := u_i s_i t_i$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i v_i \otimes w_i}{u} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} u u_i v_i \otimes w_i}{1} = 0 \in S^{-1}(V \otimes_A W)$$

d.h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{u u_i v_i \otimes w_i}{1} \in \operatorname{Ker}(j : V \otimes_A W \to S^{-1}(V \otimes_A W))$, d.h. es gibt $t \in S$ mit

$$t \sum_{i=1}^{n} u u_i v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n} u t u_i v_i \otimes w_i = 0 \in V \otimes_A W.$$

Die Abbildung $V \times W \to S^{-1}V \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}W$, $(v,w) \mapsto \frac{v}{1} \otimes \frac{w}{1}$, ist A-bilinear und induziert daher Morphismus $g : V \otimes_A W \to S^{-1}V \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}W$.
Es folgt:

$$0 = g\left(\sum_{i=1}^{n} u t u_i v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u t u_i v_i}{1} \otimes \frac{w_i}{1} \in S^{-1}V \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}W$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{u} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{u t u_i v_i}{1} \otimes \frac{w_i}{1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i v_i}{u} \otimes \frac{w_i}{1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{s_i t_i} \otimes \frac{w_i}{1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{s_i} \otimes \frac{w_i}{t_i}.$$

$\square$

Folgendes Lemma ist ein allgemeines nützliches Hilfsmittel.

<u>Lemma[8] (Fünfer-Lemma).</u> Sei

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "l"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m"', "\cong"] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "n"] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p", "\cong"'] & Z \arrow[d, hook, "q"] \\
V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z'
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Modulmorphismen mit exakten Zeilen, m und p Isomorphismen, l Epimorphismus und q Monomorphismus

Dann ist n ein Isomorphismus.

<u>Beweis:</u> Übungsaufgabe.

<u>Erinnerung</u>[9]: Ein A-Modul V heißt endlich erzeugt, falls eine exakte Sequenz

$$A^n \xrightarrow{f} V \to 0$$

existiert. Der Kern von f beschreibt Relationen zwischen den Erzeugern. Wir wollen das verschärfen:

<u>Def</u>[10]: Ein A-Modul V heißt endlich präsentiert, falls eine exakte Sequenz

$$A^m \to A^n \xrightarrow{f} V \to 0$$

existiert, d.h. die Relationen zwischen den Erzeugern sind endlich erzeugt.

<u>Bsp</u>[11]: Jeder endlich erzeugte freie Modul ist endlich präsentiert.

<u>Lemma</u>[12]:

a) Ein A-Modul V ist endlich erzeugt und projektiv, genau dann, wenn V direkter Summand von A^n für ein $n \in \mathbb{N}$.

b) Ein endlich erzeugter projektiver Modul ist bereits endlich präsentiert.

<u>Beweis:</u> Ist $A^n = V \oplus W$, so haben wir $A^n \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} V$, also V endlich erzeugt und projektiv. Weiterhin haben wir $\operatorname{Ker}\pi \simeq W$ und $A^n \twoheadrightarrow W$, also $\operatorname{Ker}\pi$ endlich erzeugt, d.h. V endlich präsentiert.

Sei V endlich erzeugt und projektiv. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Erzeugendensystem von V und sei $\pi: A^n \twoheadrightarrow V$, $e_i \mapsto v_i$ (e_i Standardvektor). Da V projektiv, gibt es Schnitt $s: V \to A^n$, d.h. $\pi s = id_V$. Es ist dann $A^n = \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker}\pi \simeq V \oplus \operatorname{Ker}\pi$. $\square$

<u>Satz:</u>[13] Sei B eine A-Algebra und seien V, W zwei A-Moduln. Dann gibt einen eindeutigen B-Modulmorphismus

$$B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(V,W) \xrightarrow{\alpha_{V,W}} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A V, B \otimes_A W)$$
$$1 \otimes f \longmapsto (1 \otimes v \longmapsto 1 \otimes f(v))$$

Ist B flacher A-Modul und V endlich präsentiert, dann ist α ein Isomorphismus.

<u>Bem:</u>[14] Vergleiche für Vektorräume: K Körper, $L \supseteq K$ Erweiterungskörper, $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$. Dann:

$$\begin{array}{ccc} L \otimes \mathrm{Hom}_K(V,W) & \simeq & \mathrm{Hom}_L(L \otimes_K V, L \otimes_K W) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ L \otimes \mathrm{Mat}_{n\times m}(K) & & \mathrm{Hom}_L(L^n, L^m) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathrm{Mat}_{n\times m}(L) & & \mathrm{Mat}_{n\times m}(L) \end{array}$$

<u>Korollar:</u>[15] Sei $S \subseteq A$ und V endlich präsentierter A-Modul. Dann ist

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(V,W) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}V, S^{-1}W)$$

für jeden A-Modul W.

<u>Beweis von Satz:</u> Dass α B-Modulmorphismus gibt, ist klar. Sei nun B flacher A-Modul und V endlich präsentiert.

① $V = A$. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(V,W) \simeq W$, $f \mapsto f(1)$. Analog

$$\mathrm{Hom}_B(B\otimes_A V, B\otimes_A W) = \mathrm{Hom}_B(\underbrace{B\otimes_A A}_{\simeq B}, B\otimes_A W) \simeq B\otimes_A W.$$

Der Morphismus α ist in diesem Fall einfach $id: B\otimes_A W \to B\otimes_A W$.

② $V = A^n$: Da Hom und $\otimes$ mit endlichen direkten Summen vertauschen, folgt die Aussage in diesem Fall mit 1.

③ Nun allgemein. Wähle Präsentation $A^m \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{g} V \to 0$.
Da $B\otimes_A -$ rechts-exakt, erhalten wir Präsentation

$$\begin{array}{ccccccc} B\otimes_A A^m & \to & B\otimes_A A^n & \to & B\otimes_A V & \to & 0 \\ \wr\wr & & \wr\wr & & & & \\ B^n & \xrightarrow{f'} & B^n & \xrightarrow{g'} & B\otimes_A V & \to & 0 \end{array}$$

d.h. $V' := B\otimes_A V$ endlich präsentierter B-Modul. Setze $W' := B\otimes_A W$.
Wenden wir $\mathrm{Hom}_A(-,W)$ auf die Präsentation von V an, so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(V,W) \xrightarrow{g^\vee} \mathrm{Hom}_A(A^n, W) \xrightarrow{f^\vee} \mathrm{Hom}_A(A^m, W) \qquad (I)$$

($\mathrm{Hom}_A(-,W)$ ist kontravariant und links-exakt).

Analog gibt $\mathrm{Hom}_B(-,W')$ auf die Präsentation von V' angewendet die exakte Sequenz (jetzt gleich umgedreht)

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(V',W') \xrightarrow{g'^\vee} \mathrm{Hom}_B(B^n, W') \xrightarrow{f'^\vee} \mathrm{Hom}_B(B^m, W') \qquad (II)$$

$B\otimes_A -$ auf (I) angewendet liefert

$$0 \to B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(V,W) \xrightarrow{g^{\vee\prime}} B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(A^n,W) \xrightarrow{f^{\vee\prime}} B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(A^m,W) \qquad (\mathrm{III})$$

Diese Sequenz ist exakt, da B flach. Wir bekommen nun kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(V,W) \arrow[r, "g^{\vee\prime}"] \arrow[d, "\alpha_{V,W}"] & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(A^n,W) \arrow[r, "f^{\vee\prime}"] \arrow[d, "\alpha_{A^n,W}", "\overset{\cong}{\text{nach } ②}"'] & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(A^m,W) \arrow[d, "\alpha_{A^m,W}", "\overset{\cong}{\text{nach } ②}"'] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(V',W') \arrow[r, "g'^{\vee}"'] & \mathrm{Hom}_B(B^n,W') \arrow[r, "f'^{\vee}"'] & \mathrm{Hom}_B(B^m,W')
\end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt und das Fünfer-Lemma impliziert nun, dass $\alpha_{V,W}$ Isomorphismus ist. $\square$