4.4

Vorlesung 13 (30.11.16)

4.4. Lokale Eigenschaften:

Sei X ein Ring A oder ein A-Modul V oder ein A-Modulmorphismus $f: V \to W$.
Für jedes $P \in \operatorname{Spec} A$ haben wir eine Lokalisierung X_P,

$$X_P = \begin{cases} A_P := (A \setminus P)^{-1} A \\ V_P := (A \setminus P)^{-1} V \\ f_P := (A \setminus P)^{-1} f : V_P \to W_P \end{cases}$$

Wir bekommen also ein "Bündel" $(X_P)_{P \in \operatorname{Spec} A}$ über $\operatorname{Spec} A$.

Def[1]: Eine Eigenschaft $\mathcal{P}$ von Ringen/Moduln/Modulmorphismen heißt lokal, falls gilt: X hat Eigenschaft $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ X_P hat Eigenschaft $\mathcal{P}$ $\forall P \in \operatorname{Spec} A$.

Lemma[2]: Trivialität von Moduln ist eine lokale Eigenschaft, d.h. für einen A-Modul V ist äquivalent:

a) $V = 0$

b) $V_P = 0 \quad \forall P \in \operatorname{Spec} A$

c) $V_M = 0 \quad \forall M \in \operatorname{Max} A$.

Beweis: Behauptung gilt offensichtlich für $A = 0$, nehmen also $A \neq 0$ an.
a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) ist klar. Angenommen, c) gilt und $V \neq 0$. Sei dann $0 \neq v \in V$ und $I = \operatorname{Ann}_A(v)$. Das ist Ideal $\neq A$, es gibt also $M \in \operatorname{Max} A$ mit $M \supseteq I$. Da $V_M = 0$, ist $\frac{v}{1} = \frac{0}{1} \in V_M \Rightarrow \exists u \in A \setminus M$ mit $vu = 0$. Aber $I = \operatorname{Ann}_A(v) \subseteq M$ ↯. Es muss also $V = 0$ ~~sein~~. Das zeigt c) $\Rightarrow$ a).
Dann ist c) $\Rightarrow$ b) auch klar. $\square$

Def.[3]: Für einen A-Modul V nennt man $\operatorname{Supp} V := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid V_P \neq 0\}$ den Träger von V. Also $V \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Supp} V \neq \emptyset$.

Bem.[4]: Allgemein genügt es, eine lokale Eigenschaft $\mathcal{P}$ nur für die X_M, $M \in \operatorname{Max} A$ zu prüfen, um zu schließen, dass X die Eigenschaft $\mathcal{P}$ hat, denn ist $P \in \operatorname{Spec} A$, wähle $M \in \operatorname{Max} A$ mit $M \supseteq P$. Gilt $\mathcal{P}$ für X_M, so gilt $\mathcal{P}$ auch für $(X_M)_{PA_M} \simeq X_P$, d.h. $\mathcal{P}$ gilt für alle X_P $\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ gilt für X, da $\mathcal{P}$ lokal.

Gleichheit von Moduln ist lokale Eigenschaft, d.h.

Korollar[5]: Sei V ein A-Modul und U ein Untermodul. Dann ist äquivalent:

a) $U = V$

b) $U_P = V_P \quad \forall P \in \operatorname{Spec} A$

c) $U_M = V_M \quad \forall M \in \operatorname{Max} A$

Beweis: Es gilt $(V/U)_P \simeq V_P/U_P$ wegen Exaktheit der Lokalisierung. Aussage folgt nun direkt aus Lemma 4.4.2 angewendet auf V/U. □

Korollar[6]: Exaktheit von Modulmorphismensequenzen ist eine lokale Eigenschaft, d.h. ist $V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V''$ eine Sequenz von A-Moduln, so ist äquivalent:

a) die Sequenz ist exakt

b) die Sequenz $V'_P \to V_P \to V''_P$ ist exakt $\forall P \in \operatorname{Spec} A$

c) die Sequenz $V'_M \to V_M \to V''_M$ ist exakt $\forall M \in \operatorname{Spec} A$.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b) folgt aus Exaktheit der Lokalisierung

b) $\Rightarrow$ c) ist klar

c) $\Rightarrow$ a) Es ist $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ zu zeigen. Nach Annahme gilt $\operatorname{Im} f_M = \operatorname{Ker} g_M$ $\forall M \in \operatorname{Max} A$. Es ist $\operatorname{Im} f_M = (\operatorname{Im} f)_M$ und $\operatorname{Ker} g_M = (\operatorname{Ker} g)_M$. Aussage folgt nun aus Korollar 4.4.5. □

Korollar[7]: Injektivität/Surjektivität/Bijektivität von Modulmorphismen ist eine lokale Eigenschaft.

Beweis: Folgt sofort aus Korollar 4.4.6. □

Bem[8]: Das Korollar impliziert nicht, dass falls $V_P \simeq W_P$ $\forall P$ mittels irgendeinem Isomorphismus, dann $V \simeq W$. Der lokale Isomorphismus $V_P \simeq W_P$ muss von einem Morphismus $V \to W$ kommen.

Lemma[9]: Flachheit ist eine lokale Eigenschaft, d.h. für einen A-Modul V sind äquivalent:

a) V ist flacher A-Modul.

b) V_P ist flacher A_P-Modul für alle $P \in \operatorname{Spec} A$.

c) V_M ist flacher A_M-Modul für alle $M \in \operatorname{Max} A$.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b) Da A_P flacher A-Modul, ist die Skalarerweiterung $V_P \simeq A_P \otimes_A V$ flacher A_P-Modul nach Übung 6.3.

b) $\Rightarrow$ c) Klar

c) $\Rightarrow$ a) Sei $W' \to W \to W''$ exakte Sequenz von A-Moduln. Müssen zeigen, dass $V \otimes_A W' \to V \otimes_A W \to V \otimes_A W''$ exakt ist. Da V_M flacher A_M-Modul, ist

$$\begin{array}{ccccc} V_M \otimes_{A_M} W'_M & \longrightarrow & V_M \otimes_{A_M} W_M & \longrightarrow & V_M \otimes_{A_M} W''_M \\ \wr\!\wr & & \wr\!\wr & & \wr\!\wr \\ (V \otimes_A W')_M & \longrightarrow & (V \otimes_A W)_M & \longrightarrow & (V \otimes_A W'')_M \end{array}$$

Lemma 4.3.7

Da Exaktheit lokale Eigenschaft, ist $V \otimes_A W' \to V \otimes_A W \to V \otimes_A W''$ exakt, also V flach □

Lemma[10]**:** Torsionsfreiheit von Moduln ist eine lokale Eigenschaft.

Beweis: Siehe Übung. $\square$

Achtung[11]**:** Freiheit/Projektivität von Moduln sind im Allgemeinen keine lokalen Eigenschaften, mehr Details nach dem Satz.

Satz[12]**:** Für einen endlich erzeugten Modul V über einem lokalen Ring ist äquivalent:

a) V ist flach

b) V ist projektiv

c) V ist frei.

Beweis: c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) ist bekannt. Sei also V flach. Wir zeigen, dass V bereits frei ist. Sei M das maximale Ideal von A. Wir zeigen induktiv folgendes: Sind $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ linear unabhängige Elemente des A/M-Vektorraums V/MV, so sind Repräsentanten ebenfalls linear unabhängig. Ist dann $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ Basis von V/MV, so wissen wir aus Korollar zu Nakayama-Lemma 3.5.7, dass $v_1, \dots, v_n$ Erzeugendensystem ist und nun auch linear unabhängig ist d.h. V frei.

Sei $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0 \in V$. Sei $I := (a_1, \dots, a_n) \trianglelefteq A$. Da V flach, ist

$$I \otimes_A V \longrightarrow A \otimes_A V \simeq V \qquad a \otimes v \longmapsto av$$

injektiv. Also ist $\sum_{i=1}^n a_i \otimes v_i = 0 \in I \otimes_A V$.

Haben kurze exakte Sequenz

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \ker g}}{K} \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{g} I \to 0$$

$$e_i \longmapsto a_i \qquad (e_i: i\text{-ter Standardvektor})$$

Da V flach, ist die Sequenz

$$0 \to K \otimes_A V \xrightarrow{f'} A^n \otimes_A V \xrightarrow{g'} I \otimes_A V \to 0$$

exakt. Es ist

$$g'\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes v_i = 0,$$

dh. es gibt $\sum_{j=1}^m a_j' \otimes v_j' \in K \otimes_A V$ mit

$$\sum_{j=1}^m a_j' \otimes v_j' = \sum_{i=1}^n e_i \otimes v_i \quad \text{in } A^n \otimes_A V$$

Schreibe $a_j' = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n e_i \otimes v_i = \sum_{j=1}^m a_j' \otimes v_j' = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i\right) \otimes v_j'$$

$$= \sum_{i=1}^n e_i \otimes \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} v_j'\right) \Rightarrow v_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j'$$

da $A^n \otimes_A V \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^n A\right) \otimes_A V \simeq \bigoplus_{i=1}^n (A \otimes_A V) \simeq V^n$.

Da $a_j' = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \in \operatorname{Ker} g$, gilt weiterhin

$$0 = g(a_j') = \sum_{i=1}^n a_{ij}\, g(e_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} a_i \quad \forall j.$$

① $n = 1$, dh $a_1 v_1 = 0$. Nach oben ist $v_1 = \sum_{j=1}^m a_{1j} v_j'$ und $a_{1j} a_1 = 0 \ \forall j$. Da $\bar{v}_1 \neq 0$, ist $v_1 \notin MV$. Also muss es Index k geben mit $a_{1k} \notin M$, dh $a_{1k} \in A \setminus M = A^\times$. Dann impliziert $a_{1k} a_1 = 0$ aber schon $a_1 = 0$.

② $n > 1$.
Betrachte v_n. Es ist $v_n = \sum_{j=1}^m a_{nj} v_j'$. Da $\bar{v}_n \neq 0$, ist $v_n \notin MV$. Also muss es Index k geben mit $a_{nk} \notin M$, also $a_{nk} \in A^\times$.

Es ist
$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_i \Rightarrow a_{nk} a_n = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} a_i$$
$$\Rightarrow \quad a_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ik}}{a_{nk}} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i \,, \quad c_i := -\frac{a_{ik}}{a_{nk}}.$$

Nun folgt
$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i\right) v_n$$
$$= a_1 (v_1 + c_1 v_n) + \dots + a_{n-1}(v_{n-1} + c_{n-1} v_n)$$

Die Elemente $\overline{v_1 + c_1 v_n}, \dots, \overline{v_{n-1} + c_{n-1} v_n} \in V/\mu v$ sind aber linear unabhängig über $V/\mu v$. Nach Induktion muss also $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ und damit auch $a_n = 0$ sein. $\square$