4.4

Vorlesung 14 (02.12.16)

Satz[12]: Für einen endlich erzeugten Modul V über einem lokalen Ring ist äquivalent:
a) V ist flach
b) V ist projektiv
c) V ist frei.

Korollar[13]: Ist V endlich erzeugter flacher Modul über einem (nicht notwendig lokalen) Ring A, so ist $V_\mathfrak{p}$ freier $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Beweis: Flachheit wird vererbt unter Ringwechsel, also ist $V_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p} \otimes_A V$ flach (und endlich erzeugt) $\Rightarrow$ $V_\mathfrak{p}$ freier $A_\mathfrak{p}$-Modul nach Satz 4.4.12. □

Wäre nun frei/projektiv lokale Eigenschaft, so wäre jeder endlich erzeugte flache Modul bereits frei/projektiv. Dafür gibt es Gegenbeispiele (siehe Übung 8.1d, 8.2).

Bem[14]: Im Beweis haben wir gezeigt: Ist V flach über einem Ring A (nicht notwendig lokal) und ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

eine Relation in V, so ist diese bereits trivial, d.h. es gibt $v_1', \dots, v_m' \in V$ und $a_{ij} \in A$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ mit

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j' \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_i = 0 \ \forall j.$$

(Diese Eigenschaft ist in der Tat äquivalent zu flach! (ohne Beweis hier))

Bem:[15] Sei A lokal. Haben gezeigt: V endlich erzeugt und projektiv $\Rightarrow V$ frei: Das gilt sogar ohne die Annahme, dass V endlich erzeugt ist (Kaplansky). Für flach gilt das aber nicht.

5. Ganzheit

5.1 Ganze Elemente

Def[1]: Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung. Ein Element $b \in B$ heißt ganz über A, falls ein monischer Polynom

$$p(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n = 0 \in A[X]$$

existiert mit $p(b) = 0$. Es sei $\mathrm{Int}_A(B) \subseteq B$ die Menge dieser Elemente.

Bsp[2]: Jedes $a \in A$ ist ganz über A, denn es erfüllt $X - a$. Also ist $A \subseteq \mathrm{Int}_A(B) \subseteq B$

Bsp[3]: $\mathrm{Int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$, denn: sei $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, oBdA r, s koprim, und

$$p(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[X]$$

mit $p(\frac{r}{s}) = 0$, d.h.

$$0 = \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1 \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\Rightarrow \quad 0 = r^n + a_1 r^{n-1} s + \dots + r s^{n-1} + a_n s^n$$

$$\Rightarrow \quad r^n = s \cdot (-a_1 r^{n-1} - \dots - r s^{n-2} - a_n s^{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad s \text{ teilt } r^n \Rightarrow s = \pm 1 \Rightarrow \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}.$$

Die exakt gleiche Argumentation zeigt allgemein:

<u>Lemma:</u>[4] Ist R faktorieller Ring mit Quotientenkörper K, so ist $\mathrm{Int}_R(K) = R$. $\square$

<u>Def</u>[5]: Ein A-Modul V heißt treu, falls $\mathrm{Ann}_A(V) = 0$, d.h. $0 \neq a \in A \Rightarrow aV \neq 0$.

<u>Satz</u>[6]: Sei $A \subseteq B$. Für $b \in B$ ist äquivalent:
a) $b \in \mathrm{Int}_A(B)$
b) $A[b]$ ist endlich erzeugter A-Modul. (Hierbei ist $A[b]$ die durch b erzeugte A-Unteralgebra von B, d.h. $A[b] = \{p(b),\ p \in A[X]\}$.)
c) $A[b]$ ist in einem Unterring A' von B enthalten, sodass A' endlich erzeugter A-Modul ist.
d) Es gibt einen treuen $A[b]$-Modul, der als A-Modul endlich erzeugt ist.

<u>Beweis:</u>
a)$\Rightarrow$b): Es gibt $p(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in A[X]$ mit $p(b) = 0$, also

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$$\Rightarrow b^{n+r} = -(a_1 b^{n+r-1} + \ldots + a_n b^r) \quad \forall r \geq 0.$$

Induktiv folgt daraus: für jedes $m \in \mathbb{N}$ liegt b^m in dem von $1, b, .., b^{n-1}$ erzeugten A-Untermodul von B, d.h.

$$A[b] = A\{1, b, .., b^{n-1}\}$$

ist endlich erzeugter A-Modul.

b) ⇒ c): Man nehme $A' := A[b]$

c) ⇒ d): Man nehme $V = A'$. Das ist A-Modul und $aA' = 0$ impliziert $a = 0$, da $1 \in A'$, also ist V treuer A-Modul.

d) ⇒ a): Benutze Cayley-Hamilton (3.5.3): Sei V treuer $A[b]$-Modul, endlich erzeugt als A-Modul. Betrachte den A-Modulmorphismus

$$f: V \longrightarrow V, \quad v \longmapsto bv.$$

Sei $I := A$. Es ist $f(V) = bV \subseteq V$, da V ein $A[b]$-Modul ist. Es gibt nach Cayley-Hamilton also monisches Polynom

$$p(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in A[X]$$

mit $p(f) = 0$, d.h.

$$(b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n) v = 0$$

für alle $v \in V$ (da f Multiplikation mit b). Da V treuer $A[b]$-Modul, folgt

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0. \qquad \square$$

<u>Zwischen-Lemma</u>[7]: Sei $A \subseteq B$. Ist V endlich erzeugter B-Modul und B endlich erzeugter A-Modul, so ist V auch endlich erzeugter A-Modul.

<u>Beweis</u>: Sei $V = B\{v_1, \dots, v_n\}$ und $B = A\{b_1, \dots, b_m\}$. Ist $v \in V$, so ist $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ für gewisse c_i. Weiterhin ist $c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j$ für gewisse a_{ij}. Also $v = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j \right) v_i = \sum_{i,j} a_{ij} b_j v_i$, d.h. $V = A\{b_j v_i\}_{ij}$ endlich erzeugt. $\square$

<u>Korollar</u>[8]: Sei $A \subseteq B$ und $b_1, \dots, b_n \in \mathrm{Int}_A(B)$. Dann ist die A-Algebra $A[b_1, \dots, b_n] \subseteq B$ endlich erzeugter A-Modul.

<u>Beweis</u>: Mit Induktion über n.
① $n = 1$: Das ist Satz 5.1.6, Aussage b
② $n > 1$: Sei $A_r := A[b_1, \dots, b_r]$. Nach Induktion ist A_{n-1} endlich erzeugter A-Modul. Nach Fall ① ist $A_n = A_{n-1}[b_n]$ endlich erzeugter A_{n-1}-Modul, also A_n endlich erzeugter A-Modul. □

<u>Korollar</u>[9]: $\mathrm{Int}_A(B)$ ist ein A enthaltender Unterring von B.

<u>Beweis</u>: Seien $b, b' \in \mathrm{Int}_A(B)$. Dann ist $A[b, b']$ endlich erzeugter A-Modul nach Korollar 5.1.8. Insbesondere ist $b + b', b \cdot b' \in A[b, b']$ in einem Unterring von B enthalten, der endlich erzeugter A-Modul ist, also $b + b', bb' \in \mathrm{Int}_A(B)$ nach Satz. □

<u>Def</u>[10]: Man nennt $\mathrm{Int}_A(B)$ den **ganzen Abschluss** (auch **Normalisierung**) von A in B.
a) Gilt $\mathrm{Int}_A(B) = A$, so heißt A **ganz abgeschlossen** in B.
b) Gilt $\mathrm{Int}_A(B) = B$, so heißt B **ganz** über A.

<u>Lemma</u>[11]: Ist $A \subseteq B$ **endliche Ringerweiterung**, d.h. B ist endlich erzeugter A-Modul, so ist B ganz über A.

<u>Beweis</u>: Folgt sofort aus dem Satz 5.1.6 (für jedes $b \in B$ ist $A[b]$ in B enthalten und das ist endlich erzeugter B-Modul, d.h. b ganz über A). □

<u>Bsp</u>[12]: $\sqrt{2}$ ist ganz über $\mathbb{Z}$, denn ist Nullstelle von $X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Also ist $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul; insbesondere ist $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ganz.