5.1

Vorlesung 15 (07.12.16)

Lemma[13] (Transitivität der Ganzheit): Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Ringe. Ist B ganz über A und C ganz über B, so ist C ganz über A.

Beweis: Sei $c \in C$. Da $C = \mathrm{Int}_B(C)$, gibt es Polynom

$$p(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_n \in B[X]$$

mit $p(c) = 0$. Da $b_i \in B = \mathrm{Int}_A(B)$, ist $B' := A[b_1, \dots, b_n]$ endlich erzeugter A-Modul nach Satz 5.1.6. Offensichtlich ist c ganz über B', also ist $B'[c]$ endlich erzeugter B'-Modul. Dann ist aber $B'[c]$ auch endlich erzeugter A-Modul nach Zwischen-Lemma oben 5.1.7, also c ganz über A nach Satz 5.1.6 ($A[c] \subseteq B'[c]$). $\square$

Korollar[14]: Der ganze Abschluss von A in B ist ganz abgeschlossen in B.

Beweis: Die Behauptung ist $\mathrm{Int}_{\mathrm{Int}_A(B)}(B) = \mathrm{Int}_A(B)$. Wir haben:

$$\underbrace{\underbrace{A \subseteq \mathrm{Int}_A(B)}_{\text{ganz}} \subseteq \underbrace{\mathrm{Int}_{\mathrm{Int}_A(B)}(B)}_{\text{ganz}}}_{\text{ganz nach Lemma}}$$

d.h. $b \in \mathrm{Int}_{\mathrm{Int}_A(B)}(B) \Rightarrow b$ ganz über $A \Rightarrow b \in \mathrm{Int}_A(B)$. $\square$

Bildung des ganzen Abschluss vertauscht mit Lokalisierung:

Lemma[15]: Sei $A \subseteq B$ und $S \subseteq A$. Dann gilt $S^{-1}\mathrm{Int}_A(B) = \mathrm{Int}_{S^{-1}A}(S^{-1}B)$.

Beweis: Beachte zunächst, dass $S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}B$, $\frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}$, injektiv, denn ist $a \in A$, $s \in \bar{S}$ mit $\frac{a}{s} = 0 = \frac{0}{1} \in S^{-1}B \Rightarrow \exists u \in \bar{S}$ mit $ua \cdot 1 = u \cdot 0 \cdot s = 0$, also auch $\frac{a}{s} = 0 \in S^{-1}A$. Können also $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ identifizieren. Analog $S^{-1}\mathrm{Int}_A(B) \subseteq S^{-1}B$.

Ist nun $b \in \mathrm{Int}_A(B)$, so ist sicherlich $\frac{b}{1} \in \mathrm{Int}_{S^{-1}A}(S^{-1}B)$, denn $\frac{b}{1}$ erfüllt jedes Polynom, das b erfüllt. Multiplikation mit Element erhält Ganzheit, also ist $\frac{b}{s} \in \mathrm{Int}_{S^{-1}A}(S^{-1}B)$ für alle $b \in \mathrm{Int}_A(B)$, $s \in \bar{S}$.

$\Rightarrow S^{-1}\mathrm{Int}_A(B) \subseteq \mathrm{Int}_{S^{-1}A}(S^{-1}B)$.

Sei andererseits $\frac{b}{s} \in \mathrm{Int}_{S^{-1}A}(S^{-1}B)$, $b \in B$, $s \in \bar{S}$. Es gibt

$$\underline{p}(X) = X^n + \frac{a_1}{s_1}X^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}X + \frac{a_n}{s_n} \in S^{-1}A[X],$$

$a_i \in A$, $s_i \in \bar{S}$ mit

$$0 = p\left(\frac{b}{s}\right) = \left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s_n} \in S^{-1}B$$

Multiplikation mit $(s \cdot s_1 \cdots s_n)^n$ gibt

$$0 = \frac{(bs_1 \cdots s_n)^n}{1} + \frac{a_1(ss_2 \cdots s_n)}{1} \cdot \frac{(bs_1 \cdots s_n)^{n-1}}{1} + \dots + \frac{a_n(ss_1 \cdots s_{n-1})^n s_n^{n-1}}{1} \in S^{-1}B$$

Es gibt also $u \in \bar{S}$ mit

$$0 = u\Big((bs_1 \cdots s_n)^n + a_1(ss_2 \cdots s_n)(bs_1 \cdots s_n)^{n-1} + \dots + a_n(ss_1 \cdots s_{n-1})^n s_n^{n-1} \in B$$

$$\Rightarrow 0 = u^n(\quad \dots\dots \quad) \in A$$

$$\Rightarrow 0 = \Big((bs_1 \cdots s_n u)^n + a_1(ss_2 \cdots s_n u)(bs_1 \cdots s_n u)^{n-1} + \dots + a_n(ss_1 \cdots s_{n-1})^n s_n^{n-1} u^n \in B$$

$$\Rightarrow bs_1 \cdots s_n u \in \mathrm{Int}_A(B)$$

Da $ss_1 \cdots s_n u \in \bar{S}$, folgt $\frac{b}{s} \in S^{-1}\mathrm{Int}_A(B)$.

□

§5.2 Normale Bereiche

Def[1]: Ist A ganz abgeschlossen in seinem totalen Quotientenring $Q(A)$, so heißt A ganz abgeschlossen an sich. Der ganze Abschluss von A in $Q(A)$ heißt auch Normalisierung von A an sich.
Ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich wird auch normaler Bereich genannt.

Bsp[2]: Jeder faktorielle Ring ist normal nach Beispiel 5.1.3.
Also:

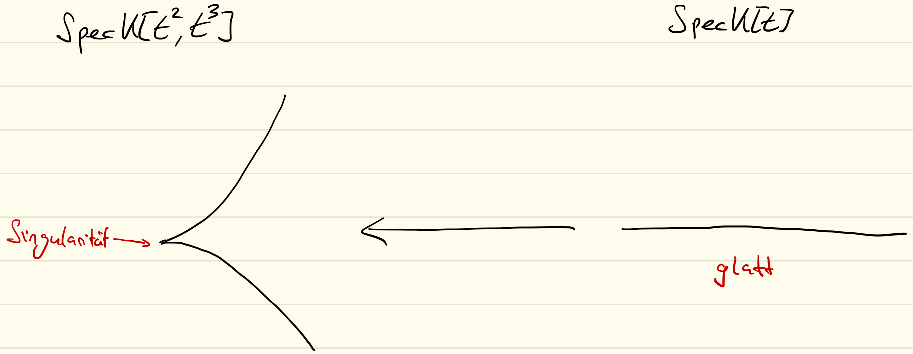
$$\text{Integritätsbereiche} \supsetneq \text{normale Bereiche} \supsetneq \text{faktorielle Ringe}$$

↑ Übung.

Faktorielle Ringe sind sehr schön, aber doch recht speziell. Normale Bereiche sind eine neue Klasse "schöner" Ringe.

Bsp[3]: Sei $A := K[t^2, t^3] \subsetneq K[t] =: B$. Dann ist $\mathrm{Int}_A(B) = B$, denn t erfüllt das Polynom $X^3 - t^3 \in A[X]$, daher $t \in \mathrm{Int}_A(B)$ und damit $\mathrm{Int}_A(B) = B$, da $\mathrm{Int}_A(B)$ ein Ring. Es ist $Q(A) = Q(B) = K(t)$, denn $t = \frac{t^3}{t^2} \in Q(A)$. Insbesondere ist A also kein normaler Bereich.

Geometrisch: $K[t^2, t^3] \simeq K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$, $X \mapsto t^2$, $Y \mapsto t^3$
Die Einbettung $K[t^2, t^3] \hookrightarrow K[t]$ induziert $\varphi : \mathrm{Spec}\, K[t] \to \mathrm{Spec}\, K[t^2, t^3]$.



Man kann sich eine Normalisierung als eine Auflösung von Singularitäten vorstellen! (zumindest in Dimension 1, also für Kurven; mehr Details in der algebraischen Geometrie).

<u>Lemma</u>[4]: Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und sei L ein algebraischer Erweiterungskörper von K, d.h. L ist ganz über K (z.B. wenn $\dim_K L < \infty$). Dann ist die Normalisierung von A in L ein normaler Bereich mit Quotientenkörper L.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Int}_A(L) & - & L \\ | & & | \\ A & - & K \end{array}$$

<u>Beweis</u>: Sei $\beta \in L$. Da $K \subseteq L$ ganz, gibt es

$$p(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in K[X]$$

mit $p(\beta) = 0$. Da $K = Q(A)$, ist $\alpha_i = \frac{a_i}{s_i}$ mit $a_i, s_i \in A$, $s_i \neq 0$.
Sei $s := s_1 \cdots s_n$ und $s_i' := s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_n$. Dann ist

$$s p(X) = s X^n + a_1 s_1' X^{n-1} + a_2 s_2' X^{n-2} + \dots + a_n s_n' \in A[X]$$

$$\Rightarrow s^n p(X) = s^n X^n + a_1 s_1' s^{n-1} X^{n-1} + a_2 s_2' s^{n-1} X^{n-2} + \dots + a_n s_n' s^{n-1} \in A[X]$$

und $0 = s^n p(\beta) = s^n\beta^n + a_1 s_1' s^{n-1}\beta^{n-1} + a_2 s_2' s^{n-1}\beta^{n-2} + \ldots + a_n s_n' s^{n-1}$

Sei

$$\tilde{p}(X) := X^n + a_1 s_1' X^{n-1} + a_2 s_2' s X^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s_{n-1}' s^{n-2} X + a_n s_n' s^{n-1} \in A[X]$$

Dann ist $\tilde{p}(s\beta) = 0$, d.h. $s\beta \in \mathrm{Int}_A(L)$. Dann ist

$$\beta = \frac{1}{s}\cdot s\beta \in Q(\mathrm{Int}_A(L)).$$

Also $L = Q(\mathrm{Int}_A(L))$. Wissen, dass $\mathrm{Int}_A(L)$ ganz abgeschlossen in L ist, also $\mathrm{Int}_A(L)$ normal. $\square$

Def[5]: Sei L ein algebraischer Zahlkörper, d.h. ein Körper $L \supseteq \mathbb{Q}$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} L < \infty$. Dann nennt man $\mathcal{O}_L := \mathrm{Int}_{\mathbb{Z}}(L)$ den Ring der algebraischen Zahlen in L.

Bsp[6]: Betrachte $L := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit d quadratfrei (nicht teilbar durch Quadratzahl). Dann ist

$$\mathcal{O}_L = \mathrm{Int}_{\mathbb{Z}}(L) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{falls } d \equiv 2,3 \bmod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & \text{falls } d \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

Siehe Übung.

Wir wissen: $\mathcal{O}_L$ ist normal und $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_L$ ist ganz. Man kann nun viele Fragen stellen:

* Ist $\mathcal{O}_L$ faktoriell? (nein im Allgemeinen; sind aber Dedekind-Ringe)
* Ist $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_L$ endlich? (ja! $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_L$ freier $\mathbb{Z}$-Modul!)
* Welche Eigenschaften hat $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L) \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$? (surjektiv, abgeschlossen)
* ....

Wir behandeln diese Fragen im Laufe der Vorlesung im Allgemeinen.