Vorlesung 16 (09.12.16)

5.3 Fasern

Für $P \in \operatorname{Spec} A$ heißt $k(P) := Q(A/P)$ der Restkörper von A in P.
Haben Morphismus $A \twoheadrightarrow A/P \hookrightarrow k(P)$, d.h. $k(P)$ ist A-Algebra.
Es ist kanonisch

$$A_P/PA_P \simeq (A/P)_{P/P} = Q(A/P) = k(P)$$

Lokalisierung am Nullideal!

Sei $\varphi: A \to B$ ein Ringmorphismus. Können B als A-Modul mittels φ betrachten und lokalisieren

$$B_P := (A \setminus P)^{-1} B \simeq A_P \otimes_A B$$

$$\varphi_P := (A \setminus P)^{-1} \varphi : A_P \to B_P$$

B_P ist Ring und φ_P ist Ringmorphismus, denn $B_P = (\varphi(A \setminus P))^{-1} B$ ist ebenfalls Lokalisierung des Rings B.
Es ist

$$\begin{aligned} k(P) \otimes_A B &\simeq (A_P/PA_P) \otimes_A B = ((A_P/PA_P) \otimes_{A_P} A_P) \otimes_A B \\ &\simeq (A_P/PA_P) \otimes_{A_P} (A_P \otimes_A B) \\ &\simeq (A_P/PA_P) \otimes_{A_P} B_P \\ &\simeq B_P/PB_P. \end{aligned}$$

(Mit Isomorphismen aus den Übungen).

Haben nun kommutatives Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}
B_Q/QB_Q = k(Q) & B_Q \arrow[l] & B \arrow[l] \arrow[r] & B/Q \arrow[r] & k(Q) \\
B_P/PB_P = k(P)\otimes_A B \arrow[u] & B_P \arrow[l] \arrow[u] & B \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, equal] & B/PB \arrow[r] \arrow[u] & B_P/PB_P \arrow[u] \\
A_P/PA_P = k(P) \arrow[u] & A_P \arrow[l] \arrow[u, "\varphi_P"] & A \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"'] & A/P \arrow[r] \arrow[u] & k(P) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Die obere Zeile bekommen wir zusätzlich für jedes $Q \in \operatorname{Spec} B$ mit $\varphi^{-1}(Q) = P$. $\operatorname{Spec}(-)$ darauf angewendet liefert:

$$
\begin{tikzcd}
\overset{(0)}{\operatorname{Spec}(k(Q))} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{Q_Q}{\operatorname{Spec}(B_Q)} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{Q}{\operatorname{Spec} B} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overset{(0)}{\operatorname{Spec}(k(Q))} \arrow[d] \\
\overset{X}{\operatorname{Spec}(k(P)\otimes_A B)} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{Q_P}{\operatorname{Spec}(B_P)} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_P^*"'] & \overset{Q}{\operatorname{Spec} B} \arrow[d, "\varphi^*"] & \overset{X}{\operatorname{Spec}(k(P)\otimes_A B)} \arrow[l] \arrow[d] \\
\overset{(0)}{\operatorname{Spec}(k(P))} \arrow[r] & \overset{PA_P}{\operatorname{Spec}(A_P)} \arrow[r] & \overset{P}{\operatorname{Spec} A} & \overset{(0)}{\operatorname{Spec}(k(P))} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Die horizontalen Morphismen induzieren immer Homöomorphismus auf ihr Bild ($\operatorname{Spec}(A/P) \simeq V(P)$ und $\operatorname{Spec}(A_P) \simeq \operatorname{Spec}_{\subseteq P}(A)$ nach Übung und §4.2).
Die äußeren vertikalen Morphismen sind identisch (könnten linke und rechte Seite verkleben). Damit folgt:

<u>Lemma</u>[1]: $\operatorname{Spec}(k(P)\otimes_A B) \simeq (\varphi^*)^{-1}(P) = \{Q \in \operatorname{Spec} B \mid \varphi^{-1}(Q) = P\}$ als Mengen. $\square$

Korollar[2]: $(\varphi^*)^{-1}(P) \neq \emptyset \iff k(P) \otimes_A B \neq 0 \iff PB_P \neq B_P$ $\square$

Def[3]: Man nennt $\operatorname{Spec}(k(P) \otimes_A B)$ (genauer $\operatorname{Spec}(k(P) \otimes_A B \to \operatorname{Spec} k(P))$) die (schema-theoretische) Faser von φ^* in P.

5.4 Primideale in ganzen Ringerweiterungen

Es sei durchweg $A \subseteq B$ ganze Ringerweiterung, also $\operatorname{Int}_A(B) = B$. Es sei $\varphi: A \hookrightarrow B$ die Einbettung.

Satz[1] (Lying over) $\varphi^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ surjektiv d.h. für jedes $P \in \operatorname{Spec} A$ gibt es $Q \in \operatorname{Spec} B$ mit $\varphi^*(Q) = P$, also $\varphi^{-1}(Q) = P$, d.h. $Q \cap A = P$.

Beweis: Nach 5.3.2 genügt es, zu zeigen, dass $PB_P \neq B_P$. Angenommen, $PB_P = B_P$. Dann wäre $1 = \sum_{i}^{n} f_i b_i$ mit $f_i \in P$, $b_i \in B_P$. Sei B' die durch $b_1, \dots, b_n$ erzeugte A_P-Unteralgebra von B_P. Dann gilt $1 \in PB'$, also $PB' = B'$!
Da $A \subseteq B$ ganz, ist auch $A_P \subseteq B_P$ ganz nach Lemma 5.1.15.
Folglich ist B' endlich erzeugter A_P-Modul nach Satz 5.1.6.
Da $PB' = B' \Rightarrow (PA_P)B' = B'$ und A_P lokal mit maximalem Ideal PA_P, impliziert Nakayama-Lemma, dass $B' = 0$ ↯ $\square$

Satz[2] (Going up). Sei $P_1 \subseteq \dots \subseteq P_n$ eine Kette in $\operatorname{Spec} A$ und sei $Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_m$, $m < n$, eine Kette in $\operatorname{Spec} B$ mit $Q_i \cap A = P_i$ $\forall i = 1 \dots m$.
Dann kann die Kette $Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_m$ zu einer Kette $Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_n$ erweitert werden mit $Q_i \cap A = P_i$ $\forall i = 1 \dots n$.
Also insbesondere:

$$\begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, dash] & Q_2 \arrow[d, dash, dashed] & \text{existiert} \\ P_1 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & P_2 & \end{tikzcd}$$

Beweis: Mit Induktion genügt es, den Fall $n=2$, $m=1$ zu betrachten.
Sei $\overline{A} := A/P_1$, $\overline{B} := B/Q_1$. Da $Q_1 \cap A = P_1$, ist $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
Da $A \subseteq B$ ganz, ist auch $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ ganz. Da $P_2 \supseteq P_1$, ist $\overline{P_2} \in \operatorname{Spec} \overline{A}$.
Nach lying over existiert also $\overline{Q_2} \in \operatorname{Spec} \overline{B}$ mit $\overline{Q_2} \cap \overline{A} = \overline{P_2}$.
Es ist $\overline{Q_2} = Q_2/Q_1$, $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$, und es gilt dann $Q_2 \cap A = P_2$. $\square$

Lemma[3]: Seien A, B Integritätsbereiche, $A \subseteq B$ ganz. Ist $0 \neq b \in B$, so liegt ein Vielfaches $\neq 0$ von b in A.

Beweis: Sei $p(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in A[X]$ mit $p(b) = 0$. Da $b \neq 0$ und B Integritätsbereich, muss $a_i \neq 0$ für ein i sein. Sei k der kleinste Index mit $a_k \neq 0$, also $a_i = 0 \ \forall i < k$, also

$$p(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_k X^{n-k} = X^{n-k}(X^k + a_1 X^{k-1} + \dots + a_k)$$

$$\Rightarrow 0 = b^{n-k}(b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_{k+1} b + a_k)$$

$$\Rightarrow 0 = b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_{k+1} b + a_k \quad \text{da } B \text{ Integritätsbereich}$$

$$\Rightarrow a_k = b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_{k+1} b = b(b^{k-1} + a_1 b^{k-2} + \dots + a_{k+1}) \in A. \quad \square$$

Satz[4] (Incomparability). Seien $Q_1, Q_2 \in (\varphi^*)^{-1}(P)$. Dann sind Q_1, Q_2 unvergleichbar, d.h. $Q_1 \nsubseteq Q_2$ und $Q_2 \nsubseteq Q_1$.

Beweis:
① A, B Integritätsbereiche, $P = 0$. Sei $Q \in (\varphi^*)^{-1}(0)$, d.h. $Q \cap A = 0$.
Angenommen, $Q \neq 0$. Sei $0 \neq b \in Q$. $\Rightarrow \exists\, 0 \neq a \in A$ mit $a \in B \cdot b \subseteq Q$ nach Lemma 5.4.3. $\Rightarrow Q \cap A \neq 0$ ↯.
② Allgemein: Angenommen, Q_1, Q_2 wären vergleichbar, oBdA $Q_1 \subseteq Q_2$.
Da $A \cap Q_1 = P$, haben wir Erweiterung $A/P \subseteq B/Q_1$. Da $A \subseteq B$ ganz, ist diese auch ganz. Dann liegen Q_1/Q_1 und Q_2/Q_1 beide über P/P

$\Rightarrow Q_2/Q_1 = Q_1/Q_1$ nach Fall 1

$\Rightarrow Q_2 = Q_1.$ $\square$