5.4

Vorlesung 17 (14.12.16)

Korollar[5]: Sind A, B Integritätsbereiche, so ist A Körper genau dann, wenn B Körper.

Beweis: Es ist $\operatorname{Spec} A = \{(0)\} \Leftrightarrow \operatorname{Spec} B = \{(0)\}$ wegen Lying over und Unvergleichbarkeit. Ein Integritätsbereich ist Körper genau dann, wenn (0) einziges Primideal, denn ist $0 \neq a \Rightarrow (a) = A \Rightarrow \exists b : ab = 1$. □

6. Nullstellensatz

Wir schauen uns K-Algebren endlichen Typs näher an.

Def[1]: Ein Ring A heißt Jacobson, falls jedes Primideal Schnitt von maximalen Idealen ist.

$$\Big(\Leftrightarrow P = \bigcap_{\substack{M \in \operatorname{Max} A \\ M \supseteq P}} M \Leftrightarrow \sqrt{I} = \bigcap_{\substack{M \in \operatorname{Max} A \\ M \supseteq I}} M \text{ für jedes Ideal } I \Big)$$

Bsp[2]: Jeder Körper ist Jacobson.

Bsp[3]: Ist A Hauptidealbereich mit $\operatorname{Jac}(A) = 0$, so ist A Jacobson, denn: Wissen: Alle Primideale $\neq 0$ sind bereits maximal (Übung 3.1b). Bleibt nur noch $(0) = \bigcap_{M \in \operatorname{Max} A} M$ zu prüfen, aber das ist nach Definition gleich $\operatorname{Jac}(A)$.

Es ist $\operatorname{Jac}(K[X]) = \operatorname{Nil}(K[X]) = 0$ nach Übung 3.1d, also $K[X]$ Jacobson. Weiterhin ist $\mathbb{Z}$ Jacobson.

Bsp:[4] Ein Quotient eines Jacobson-Rings ist Jacobson

Erinnerung:[5] Eine R-Algebra A ist von endlichem Typ (auch endlich erzeugt), falls A als R-Algebra von endlich vielen Elementen erzeugt wird, d.h. es gibt surjektiven R-Algebrenmorphismus $R[X_1,\dots,X_n] \twoheadrightarrow A$.

Wollen folgenden Satz zeigen:

Satz:[6] Ist R ein Jacobson-Ring, so ist auch jede R-Algebra $\varphi: R \to A$ endlichen Typs ein Jacobson-Ring. Ist weiterhin $M \in \operatorname{Max}(A)$, so ist $\varphi^{-1}(M) \in \operatorname{Max} R$ und $R/\varphi^{-1}(M) \subseteq A/M$ ist eine endliche Körpererweiterung.

Korollar:[7] Ist K ein Körper, so ist $K[X_1,\dots,X_n]$ Jacobson und ist $M \in \operatorname{Max}(K[X_1,\dots,X_n])$, so ist $K \subseteq K[X_1,\dots,X_n]/M$ endliche Körpererweiterung. Selbiges gilt für Quotienten von $K[X_1,\dots,X_n]$.

Beweis: Klar. Beachte nur, dass $\varphi^{-1}(M) = (0) \in \operatorname{Max}(K)$. $\square$

Korollar:[8] Sei K algebraisch abgeschlossen. Ist $M \in \operatorname{Max}(K[X_1,\dots,X_n])$, so ist $K[X_1,\dots,X_n]/M \simeq K$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow \operatorname{Max} K[X_1,\dots,X_n] \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_n) &\longmapsto (X_1-\alpha_1,\dots,X_n-\alpha_n) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Beweis: Dass $(X_1-\alpha_1,\dots,X_n-\alpha_n) \in \operatorname{Max} K[X_1,\dots,X_n]$, ist klar.
Sei $M \in \operatorname{Max} K[X_1,\dots,X_n]$. Nach Satz ist $K \subseteq K[X_1,\dots,X_n]/M$ endlich. Da K algebraisch abgeschlossen, folgt bereits Gleichheit. Sei

$$\psi: K[X_1,\dots,X_n] \twoheadrightarrow K[X_1,\dots,X_n]/M \simeq K$$

und $\alpha_i := \psi(X_i)$. Sicherlich ist

$$(X_1-\alpha_1, \dots, X_n-\alpha_n) \subseteq \operatorname{Ker}\psi = M$$

Linke Seite ist maximal, daher folgt Gleichheit. $\square$

<u>Korollar</u>[9] Ist K algebraisch abgeschlossen und $S \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein "Polynomsystem" mit $(S) \neq K[X_1, \dots, X_n]$, so gibt es $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ mit

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \forall f \in S.$$

<u>Beweis:</u> Da $(S) \neq K[X_1, \dots, X_n]$, gibt es $M \in \operatorname{Max}(K[X_1, \dots, X_n])$ mit $S \subseteq M$. Es ist nun $M = (X_1-\alpha_1, \dots, X_n-\alpha_n)$ und $f \in M$ $\forall f \in S$, also

$$f(X_1-\alpha_1, \dots, X_n-\alpha_n) = 0 \quad \forall f \in S$$

$\square$

Man nennt dieses Korollar (und allgemeiner obigen Satz) auch *Hilbertscher Nullstellensatz*.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir folgendes Lemma.

<u>Lemma:</u>[10] Für einen Ring A ist äquivalent:

a) A ist Jacobson.

b) Ist $P \in \operatorname{Spec} A$ und enthält $B := A/P$ ein Element $b \neq 0$, sodass $B_b = \{b\}^{-1}B$ ein Körper ist, so ist B bereits ein Körper. (dies hier ist schon eine Art Endlichkeitseigenschaft!)

<u>Beweis:</u>

a)$\Rightarrow$b) Da A Jacobson, ist offensichtlich auch $B = A/P$ Jacobson. Da B Integritätsbereich, ist $(0) \in \operatorname{Spec} B$ und damit $(0) = \bigcap_{M \in \operatorname{Max} B} M$, da B Jacobson.

Wir haben $\operatorname{Spec} B_b \simeq \operatorname{Spec}_{\{b\}} B = \{Q \in \operatorname{Spec} B \mid Q \cap \overline{\{b\}} = \emptyset\}$
$= \{Q \in \operatorname{Spec} B \mid b \notin Q\}$

Da B_b Körper, ist $\operatorname{Spec}_{\{b\}} B = \{(0)\}$, also $b \in Q$ für alle $0 \neq Q \in \operatorname{Spec} B$.
Angenommen, $(0) \in \operatorname{Spec} B$ wäre nicht maximal, dann wäre

$$(0) = \bigcap_{M \in \operatorname{Max} B} M = \bigcap_{\substack{M \in \operatorname{Max} B \\ M \neq 0}} M \ni b$$

$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow B_b = 0$ ↯ zu B_b Körper. Also (0) maximal in B, daher B Körper.

b) $\Rightarrow$ a) Sei $Q \in \operatorname{Spec} A$. Sei $I := \bigcap_{\substack{M \in \operatorname{Max} A \\ M \supseteq Q}} M \trianglelefteq A$. Wir wollen $I = Q$ zeigen.

Angenommen, $Q \neq I$. $\Rightarrow I \supsetneq Q$. Sei $b \in I \setminus Q$. Sei Σ die Menge aller Primideale in A, die Q enthalten aber nicht b. Nach Zorns Lemma existiert maximales Element P in Σ.
P kann nicht maximal sein, denn sonst ↯ zu $b \in I$:

$$I = \bigcap_{\substack{M \in \operatorname{Max} A \\ M \supseteq Q}} M \leftarrow$$

P wäre dann unter den M aber $b \notin P$ $\Rightarrow b \notin I$ ↯

Also ist $B := A/P$ kein Körper. Es ist aber $0 \neq \bar{b} \in B$ und

$$\operatorname{Spec} A_b \simeq \{P' \in \operatorname{Spec} A \mid P' \not\ni b\} \supseteq \Sigma \ni P.$$

Da P maximal in Σ, ist P auch maximal in $\operatorname{Spec} A_b$, denn $P' \supseteq P$ $\Rightarrow P' \supseteq Q \Rightarrow P' \in \Sigma$. Also ist

$$A_b / P A_b \simeq (A/P)_b = B_b$$

ein Körper ↯ zur Annahme. □

Beweis des Satzes:

Teil 0: Vorbereitung.

Angenommen, es gilt zusätzlich:

a) $R \subseteq A$

b) R und A sind Integritätsbereiche

c) A wird von nur einem Element erzeugt

d) es gibt $0 \neq b \in A$ mit A_b Körper

Dann sind R und A bereits Körper und $R \subseteq A$ ist endlich.

Bew.: Da A von einem Element, sagen wir t, erzeugt, ist $A = R[X]/Q$ für ein $Q \in \operatorname{Spec} R[X]$ und $X \mapsto t$ hierbei. Nach Annahme ist $R \subseteq A$, also die Komposition

$$R \hookrightarrow R[X] \twoheadrightarrow R[X]/Q = A$$

ist injektiv. Es muss also $Q \cap R = 0$ sein. Sei $S := R \setminus \{0\}$. Es ist

$$S^{-1}R = Q(R) =: K$$
$$S^{-1}(R[X]) = K[X]$$

Haben Lokalisierungsmorphismus

$$\begin{aligned} j: R[X] &\longrightarrow K[X] \\ Q &\longmapsto QK[X] \end{aligned}$$

Da $Q \cap S = \emptyset$, ist $QK[X] \in \operatorname{Spec} K[X]$ und $j^{-1}(QK[X]) = Q$ (Korrespondenz bei Lokalisierung). Also induziert j

$$A := R[X]/Q \hookrightarrow K[X]/QK[X]$$

Es muss $Q \neq 0$ gelten. Denn angenommen, $Q = 0$.
Dann wäre $A = R[X]$ und $A_b = R[X]_b$ ein Körper nach Annahme.
Da $R \subseteq R[X]_b$ und das Körper, ist auch $K \subseteq R[X]_b$ und daher

$R[X]_b = K[X]_b$ ein Körper. Aber $K[X]$ ist Jacobson, also müsste dann auch $K[X]$ Körper sein nach Lemma 6.10b (angewandt auf $P=0$). ↯
Also $Q \neq 0$. Dann ist aber $QK[X] \in \operatorname{Spec} K[X]$ schon maximal, also $K[X]/QK[X]$ ist Körper und daher

$$A_b = \left(R[X]/Q \right)_b = K[X]/QK[X].$$

$R \subseteq A \subseteq A_b$
Da A_b Körper $\Rightarrow K \subseteq A_b$
$\Rightarrow (K[X]/Q)_b \subseteq A_b$
$\Rightarrow$ Gleichheit

Da $K[X]$ Hauptidealring, ist $QK[X] = (p)$ für ein

$$p(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in K[X].$$

Es war t das Bild von X in $R[X]/Q$. Es ist dann $p(t) = 0$ und $\dim_K (K[X]/QK[X]) \leq \deg f < \infty$.
Wir können p mit dem Produkt der Nenner der Koeffizienten multiplizieren und erhalten

$$\tilde{p}(X) = r_n X^n + r_{n-1} X^{n-1} + \dots + r_0 \in R[X]$$

mit $\tilde{p}(t) = 0$. Invertieren wir r_n, so folgt $t \in A_{r_n} = \{r_n\}^{-1} A$ ist ganz über $R_{r_n} = \{r_n\}^{-1} R$. Also ist $R_{r_n} \subseteq A_{r_n}$ ganz, da A_{r_n} als R_{r_n}-Algebra von t erzeugt.
Da $b \in A_b = K[X]/QK[X]$ und $\dim_K K[X]/QK[X] < \infty$, gibt es

$$q(X) := q_m X^m + \dots + q_0 \in K[X]$$

mit $q(b) = 0$. Wieder können wir durch Multiplizieren mit den Nennern

$$\tilde{q}(X) := s_m X^m + s_{m-1} X^{m-1} + \dots + s_1 X + s_0 \in R[X]$$

mit $\tilde{q}(b) = 0$ erhalten. Da A Integritätsbereich können wir $s_0 \neq 0$ annehmen (können sonst b ausklammern und $b \neq 0$). Sei $\beta := b^{-1} \in K[X]/QK[X]$.
Multiplikation von $\tilde{q}(b) = 0$ mit $(s_0 b^m)^{-1}$ liefert

$$0 = \frac{s_m}{s_0} + \frac{s_{m-1}}{s_0} \beta + \dots + \frac{s_1}{s_0} \beta^{m-1} + \beta^m$$

d.h. $\beta = b^{-1}$ ist ganz über R_{s_0}. Also ist $A_b = A[b^{-1}]$ ganz über $A_{s_0} \supseteq R_{s_0}$, insbesondere also auch ganz über dem größeren Ring

$$\{r_n, s_0\}^{-1}A = A_{r_n s_0}$$

Da $R_{r_n} \subseteq A_{r_n}$ ganz, ist auch

$$R_{r_n s_0} \subseteq A_{r_n s_0}$$

ganz. Haben nun

$$\underbrace{R_{r_n s_0} \subseteq A_{r_n s_0}}_{\text{ganz}} \subseteq A_b$$
$$A_{r_n s_0} \underbrace{\subseteq A_b}_{\text{ganz}}$$

$R_{r_n s_0}$ Körper nach Lemma 5.4.5. Nun ist R Jacobson und $r_n s_0 \in R = R/0$ mit $R_{r_n s_0}$ Körper. Also ist bereits R Körper nach Lemma 6.10b.

Es ist also $R = K$ und da $\dim_K(A_b) = \dim_K(K[X]/Q K[X]) < \infty$, ist auch $\dim_K A < \infty$, also A endlich über K. Dann ist also auch A Körper nach Lemma 5.4.5.

Nun zum eigentlichen Thema:

Teil 1: Rang 1

A wird von nur einem Element erzeugt. Sei $P \in \operatorname{Spec} A$. Angenommen, es gibt $0 \neq b \in B := A/P$, sodass B_b Körper (gilt natürlich, falls P maximal!) Sei $N := \varphi^{-1}(P)$ und $\overline{R} := R/N$.
Nun sind $\overline{R}$ und B Integritätsbereiche und $\overline{R} \subseteq B$.
Weiterhin ist B eine $\overline{R}$-Algebra, die von nur einem Element erzeugt wird. Schließlich ist $\overline{R}$ Jacobson, da Quotient von Jacobson. Es gilt also a) – d) in Teil 0 und es folgt B Körper, $\overline{R}$ Körper und $\overline{R} \subseteq B$ endlich. Da P allgemein, folgt insbesondere A Jacobson mit dem vorangehenden Lemma! Weiterhin folgt für P maximal auch $N = \varphi^{-1}(P)$ maximal (da $\overline{R}$ Körper) und $R/N = \overline{R} \hookrightarrow A/P = B$ endlich.

Das zeigt den Satz also im Fall, dass A von einem Element erzeugt.

Teil 2: Allgemein

Per Induktion: A sei von Elementen $a_1, \dots, a_r$, $r > 1$, erzeugt. Sei A' die durch $a_1, \dots, a_{r-1}$ erzeugte Unteralgebra. Nach Annahme ist A' Jacobson. Nach Teil 1 ist dann auch $A = A'[a_r]$ Jacobson. Sei $M \in \operatorname{Max} A$. Nach Teil 1 ist dann $M' := A' \cap M \in \operatorname{Max} A'$ und $A'/M' \subseteq A/M$ endlich. Sei $\varphi' : R \to A'$. Nach Induktion ist $N := (\varphi')^{-1}(M') \in \operatorname{Max} R$ und $R/N \subseteq A'/M'$ ist endlich. Es ist $N = \varphi^{-1}(M)$ und dann auch $R/N \subseteq A/M$ endlich. $\square$