Vorlesung 19 (21.12.16)

7. Kettenbedingungen

7.1 Allgemeines

Lemma[1]: Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Es ist äquivalent:
a) Jede aufsteigende Kette $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ in X ist stationär, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_{n+1} = \dots$
b) Jede nicht-leere Teilmenge von X hat ein maximales Element.

Beweis:
a) $\Rightarrow$ b) Angenommen, b) gilt nicht, d.h. es gibt $\emptyset \neq T \subseteq X$ ohne maximales Element. Wähle $x_1 \in T$. Da $x_1 \in T$ nicht maximal, muss es $x_2 \in T$ geben mit $x_1 < x_2$. Man fährt induktiv fort und erhält unendliche nicht-stationäre Kette. ↯
b) $\Rightarrow$ a) Die Menge $T := (x_i)_{i \geq 1}$ hat maximales Element nach Annahme, d.h. wird stationär.

Def[2]: Die Eigenschaft aus dem Lemma[7.1.1] heißt aufsteigende Kettenbedingung. Erfüllt X diese, so heißt X noethersch.

Haben analog: Jede absteigende Kette $x_1 \geq x_2 \geq \dots$ ist stationär $\Leftrightarrow$ jede nicht-leere Teilmenge hat minimales Element. Heißt absteigende Kettenbedingung und X heißt dann artinsch.

7.2 Noethersche Moduln

Def:[1] Ein A-Modul V heißt noethersch, falls die Menge $\mathrm{Sub}(V)$ seiner Untermoduln bzgl. $\subseteq$ noethersch ist.

Bsp:[2] Hat V nur endlich viele Elemente, so ist V noethersch (z.B. endliche abelsche Gruppen als $\mathbb{Z}$-Moduln.)

Bsp:[3] $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul ist noethersch, denn ist

$$\begin{array}{ccccc} I_1 & \subseteq & I_2 & \subseteq & \dots \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ (a_1) & & (a_2) & & \end{array}$$

Kette von Untermoduln (Idealen), so gilt $a_i | a_1 \ \forall i$. Da a_1 nur endliche viele Teiler hat, ist die Kette stationär.

Bsp:[4] Allgemeiner: Ist A Hauptidealring, so ist A als A-Modul noethersch.

Bsp:[5] Der Polynomring $K[(X_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ in unendlich vielen Variablen ist nicht noethersch als Modul über sich selbst, denn

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq (X_1, X_2, X_3) \subsetneq \dots$$

ist eine nicht-stationäre aufsteigende Kette.

Satz:[6] Ein A-Modul V ist noethersch genau dann, wenn jeder Untermodul endlich erzeugt ist.

Beweis:

Sei V noethersch und sei $U \subseteq V$ Untermodul. Sei Σ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von U. Es ist $\Sigma \neq \emptyset$, da $0 \in \Sigma$. Da V noethersch, hat Σ maximales Element U_0. Angenommen, $U_0 \neq U$. Sei $x \in U \setminus U_0$. Dann

ist $U_0 + Ax \in \Sigma$ und echt größer als U_0 ↯ Also ist $U_0 = U$ und damit U endlich erzeugt.
Nun angenommen, jeder Untermodul von V ist endlich erzeugt. Sei $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ Kette von Untermoduln von V. Dann ist auch $U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ Untermodul (da $(U_i)_i$ Kette). Also ist U endlich erzeugt nach Voraussetzung. Seien $u_1, \dots, u_r$ Erzeuger von U. Dann ist $u_i \in U_{n_i}$ für ein i. Also $u_i \in U_n$ mit $n := \max\{n_i\}$. Folglich $U_n = U$. Also V noethersch $\square$

<u>Lemma</u>[7]: Ist $0 \to V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \to 0$ exakte Sequenz von A-Moduln, so ist V noethersch $\Leftrightarrow$ V' und V'' noethersch.

<u>Beweis</u>: Sei V noethersch. Eine aufsteigende Kette in V' oder V'' gibt dann Kette in V und ist daher stationär.
Sei andererseits V', V'' noethersch. Sei $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$ Kette in V. Sei $V_i' := f^{-1}(V_i)$ und $V_i'' := g(V_i)$. Dann ist $V_1' \subseteq V_2' \subseteq \dots$ Kette in V', also stationär. Analog ist $V_1'' \subseteq V_2'' \subseteq \dots$ stationär. Es gibt also $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n' = V_{n+1}' = \dots$ und $V_n'' = V_{n+1}'' = \dots$.
Sei $v_{n+1} \in V_{n+1}$. Dann ist $g(v_{n+1}) \in g(V_{n+1}) = V_{n+1}'' = V_n'' = g(V_n)$. Es gibt also $v_n \in V_n$ mit $g(v_n) = g(v_{n+1})$. Also $v_n - v_{n+1} \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Es gibt also $v' \in V'$ mit $v_n - v_{n+1} = f(v')$. Es ist $v_n - v_{n+1} \in V_{n+1}$, also $v' \in f^{-1}(V_{n+1}) = V_{n+1}' = V_n'$. Also $v_n - v_{n+1} = f(v') \in f(V_n') = f(f^{-1}(V_n)) \subseteq V_n$. Folglich ist

$$v_{n+1} = \underbrace{v_n}_{\in V_n} - \underbrace{f(v')}_{\in V_n} \in V_n \Rightarrow v_{n+1} \in V_n \Rightarrow V_n = V_{n+1}$$

Analog $V_n = V_{n+1} = V_{n+2} = \dots$, Kette also stationär. Also ist V noethersch. $\square$

<u>Lemma</u>[8]: Endliche direkte Summen noetherscher Moduln sind noethersch

<u>Beweis</u>: Siehe Übung. $\square$

Lemma[9]: Ist V ein noetherscher A-Modul und $S \subseteq A$, so ist $S^{-1}V$ noetherscher $S^{-1}A$-Modul.

Beweis: Siehe Übung. $\square$

7.3. Noethersche Ringe

Def[1]: Ein Ring A heißt noethersch, falls der A-Modul A noethersch ist.

Bsp[2]: von 7.2.4: $\mathbb{Z}$ ist noethersch, allgemeiner sind Hauptidealringe noethersch.

Bsp[3]: von 7.2.5: $K[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ ist nicht noethersch.

Lemma[4]: Quotienten und Lokalisierungen noetherscher Ringe sind noethersch.

Beweis: Bereits für Moduln gezeigt.

Lemma[5]: Ist A noetherscher Ring und V endlich erzeugter A-Modul, so ist V noethersch.

Beweis: Haben exakte Sequenz $0 \to U \to A^n \to V \to 0$ für ein n. Da A noethersch, ist auch A^n noethersch nach Lemma 7.2.8. Also ist auch V noethersch nach Lemma 7.2.7. $\square$

Korollar[6]: Ist A noethersch, so ist jeder endlich erzeugte Modul bereits endlich präsentiert.

Beweis: Da V endlich erzeugt, haben wir $A^n \overset{f}{\twoheadrightarrow} V$ surjektiv. Da A^n noethersch nach 7.2.8, ist $\operatorname{Ker} f \subseteq A^n$ endlich erzeugt. $\square$

Satz[7] (*Hilbertscher Basissatz*) Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch jede R-Algebra endlichen Typs noethersch.

Beweis: Es genügt, den Fall $A = R[X]$ zu betrachten, allgemeine Aussage folgt per Induktion und dem Fakt, dass Quotienten noetherscher Ringe noethersch sind.

Erinnerung: A noethersch $\Leftrightarrow$ der A-Modul A ist noethersch $\Leftrightarrow$ jeder Untermodul (Ideal) von A ist endlich erzeugt.

Sei also $I \trianglelefteq A = R[X]$. Die Leitkoeffizienten der $f \in I$ bilden dann ein Ideal J in R. Da R noethersch, ist J endlich erzeugt, also $J = (r_1, \dots, r_n)$ für gewisse $r_i \in R$. Es gibt dann für jedes i ein $f_i \in I$ mit Leitkoeffizient r_i. Sei $I' := (f_1, \dots, f_n) \trianglelefteq A$. Dann ist $I' \subseteq I$. Sei $d_i := \deg f_i$ und $d := \max_i d_i$ und sei $V := R\{1, X, \dots, X^{d-1}\}$ der von $1, X, \dots, X^{d-1}$ erzeugte R-Untermodul von A.

Beh: $I = (I \cap V) + I'$.

Bew: Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Für $\subseteq$ sei $f \in I$. Ist $\deg f < d$, so ist $f \in I \cap V \subseteq (I \cap V) + I'$! Sei also $\deg f \geq d$. Sei r der Leitkoeffizient von f. Dann ist $r \in J$, also $r = \sum_{i=1}^{n} s_i r_i$ für gewisse $s_i \in R$. Sei

$$f' := \sum_{i=1}^{n} s_i f_i X^{\deg f - d_i}.$$

Das ist Element von I' vom Grad $\deg f$ mit Leitkoeffizient $\sum_{i=1}^{n} s_i r_i = r$. Folglich ist $\deg(f - f') < \deg f$. Weiterhin $f - f' \in I$. Fährt man analog fort, erhält man $f'' \in I'$ mit $\deg(f - f'') < d$, also $f - f'' \in I \cap V$, also $f \in (I \cap V) + I'$.

Da V endlich erzeugter R-Modul und R noethersch, ist auch V

noethersch nach Lemma 7.3.6. Folglich ist der R-Untermodul $I \cap V \subseteq V$ endlich erzeugt. Insbesondere ist $I \cap V$ endlich erzeugter A-Modul. Da I' endlich erzeugter A-Modul, ist auch $I = (I \cap V) + I'$ endlich erzeugt. $\square$