Vorlesung 20 (11.01.16)

7.4. Artinsche Moduln

Erinnerung[1]: A-Modul V heißt artinsch, falls $\mathrm{Sub}(V)$ bzgl. $\subseteq$ artinsch ist, d.h. jede absteigende Kette von Untermoduln ist stationär ($\Leftrightarrow$ jede nicht leere Menge von Untermoduln hat ein minimales Element.)

Bsp[2]: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist artinscher $\mathbb{Z}$-Modul $\forall n \geq 1$. Aber $\mathbb{Z}$ kein artinscher $\mathbb{Z}$-Modul: $(2) \supsetneq (4) \supsetneq (8) \supsetneq \dots$ ist nicht stationär. Analog ist $K[X]$ kein artinscher $K[X]$-Modul: $(X) \supsetneq (X^2) \supsetneq (X^3) \supsetneq \dots$ ist nicht stationär.

Bsp[3]: Ist K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, so ist V artinscher K-Modul, denn ist $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \dots$ eine Kette, so gilt $\dim V_i > \dim V_{i+1}$, Kette ist also stationär.

Bsp[4]: Ist K ein Körper und A eine endlich-dimensionale K-Algebra, so ist A artinscher A-Modul (da bereits als K-Modul artinsch).

Achtung[5]: Während noethersche Moduln immer endlich erzeugt sind, muss das für artinsche Moduln nicht gelten, siehe Übung.

Lemma[6]: Ist $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ kurze exakte Sequenz von A-Moduln, so ist V artinsch $\Leftrightarrow$ V' und V'' artinsch.

Beweis: Analog zum noetherschen Fall, Lemma 7.2.7. $\square$

Korollar[7]: Endliche direkte Summen artinscher Moduln sind artinsch.

Beweis: Analog zum noetherschen Fall, Lemma 7.2.8. $\square$

7.5 Länge von Moduln

Def.[1] Sei V ein A-Modul. Ist $V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_n$ eine endliche Kette von Untermoduln von V, so heißt n die Länge der Kette. Man nennt das Supremum der Längen endlicher Ketten von Untermoduln von V (mit strikten Inklusionen), die Länge von V, geschrieben $\mathrm{length}(V)$. Man sagt V hat endliche Länge, falls $\mathrm{length}(V) < \infty$.

Bsp.[2] Ist K ein Körper und V ein Vektorraum, so ist $\mathrm{length}(V) = \dim(V)$.

Bem.[3] Hat V endliche Länge, so ist V endlich erzeugt. Andererseits muss ein endlich erzeugter Modul nicht endliche Länge haben, z.B. $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul: für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir Kette der Länge n, z.B.
$\mathbb{Z} \supsetneq (2) \supsetneq (2^2) \supsetneq \ldots \supsetneq (2^n)$.

Def.[4] Ein A-Modul V heißt einfach, falls $V \neq 0$ und 0 und V die einzigen Untermoduln von V sind.

Bem.[5] Offensichtlich ist V einfach $\Leftrightarrow \mathrm{length}(V) = 1$.

Bem.[6] Ist V einfach und $0 \neq v \in V$, so ist $Av = V$ (ansonsten wäre das nicht-triviales Untermodul.

Def.[7] Eine Kompositionsreihe eines A-Moduls V ist eine maximale endliche Kette von Untermoduln mit strikten Inklusionen, d.h. von der Form

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_n = 0$$

mit V_i/V_{i+1} einfach $\forall i$. Ist S ein einfaches A-Modul, so nennt man

$$\#\{0 \leq i < n \mid S \cong V_i/V_{i+1}\}$$

die Multiplizität von S in der Kette.

Satz:[8] Für einen A-Modul V ist äquivalent:
a) V hat endliche Länge
b) V ist noethersch und artinsch.
c) V hat eine Kompositionsreihe

In diesem Fall gilt:
1. Alle Kompositionsreihen von V haben dieselbe Länge, nämlich $\mathrm{length}(V)$.
2. Jede Kette in V kann zu einer Kompositionsreihe von V erweitert werden.

Beweis: Angenommen, $\mathrm{length}(V) < \infty$. Dann ist jede aufsteigende und jede absteigende Kette in V spätestens ab dem $\mathrm{length}(V)$-ten Glied konstant, also stationär. Folglich ist V noethersch und artinsch.
Sei V andererseits noethersch und artinsch. Konstruiere Kompositionsreihe wie folgt: $V_0 := V$. Da V noethersch, hat V_0 einen maximalen Untermodul V_1. Setze das jetzt mit V_1 fort usw und wir erhalten Kette

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \dots$$

Da V artinsch, ist diese Kette stationär, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n = 0$. Diese Kette ist also Kompositionsreihe.
Nun angenommen, V hat Kompositionsreihe. Sei $\ell(V)$ das Minimum der Längen von Kompositionsreihen von V. Es ist $\ell(V) \leq \mathrm{length}(V)$.
Beh: Ist $V' \subsetneq V$, so ist $\ell(V') < \ell(V)$.
Bew: Sei $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \dots \supsetneq V_n = 0$ Kompositionsreihe minimaler Länge. Setze $V_i' := V' \cap V_i$. Haben dann Kette $V' = V_0' \supseteq V_1' \supseteq \dots \supseteq V_n' = 0$.
Es ist $V_i'/V_{i+1}' \subseteq V_i/V_{i+1}$. Da V_i/V_{i+1} einfach, gilt also $V_i'/V_{i+1}' = 0$ oder $V_i'/V_{i+1}' = V_i/V_{i+1}$, d.h. $V_i' = V_{i+1}'$ oder V_i'/V_{i+1}' einfach. Entfernt man also aus $V' = V_0' \supseteq V_1' \supseteq \dots \supseteq V_n' = 0$ die mehrfachen Glieder, so erhält

man eine Kompositionsreihe von V', daher $\ell(V') \leq \ell(V)$. Angenommen $\ell(V') = \ell(V)$. Dann ist keins der V_i' überflüssig und daher $V_i'/V_{i+1}' = V_i/V_{i+1}$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$. Es folgt $V_{n-1}' = V_{n-1}'/V_n' = V_{n-1}/V_n = V_{n-1}$ und induktiv damit $V' = V_0' = V_0 = V$ ↯.

<u>Beh:</u> $\mathrm{length}(V) = \ell(V)$

<u>Beweis:</u> Ist $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_n = 0$ Kette in V, so gilt nach oben

$$\ell(V) > \ell(V_1) > \ell(V_2) > \ldots > \ell(V_n) = 0$$

d.h. $\ell(V) \geq n$. Daher gilt $\ell(V) \geq \mathrm{Length}(V)$. Da V eine Kette der Länge $\ell(V)$ hat, folgt Gleichheit. Insbesondere ist $\mathrm{Length}(V) < \infty$, das zeigt d) ⇒ a)

Betrachte nun irgendeine Kompositionsreihe von V. Sei n deren Länge. Nach oben gilt $n \leq \mathrm{length}(V) = \ell(V)$. Dann gilt nach Definition von $\ell(V)$ aber bereits Gleichheit. Das zeigt Aussage 1.

Betrachte nun irgendeine Kette in V. Sei n deren Länge. Ist $n = \ell(V)$, so ist dies bereits Kompositionsreihe da $n = \mathrm{Length}(V)$ (Kette ist maximal). Ist $n < \ell(V) = \mathrm{length}(V)$, so ist die Kette nicht maximal. Es können also weitere Glieder eingefügt werden bis $n = \mathrm{Length}(V)$ und damit Kompositionsreihe. Das zeigt Aussage 2. □

<u>Bemerkung</u>[9]: Sei A ein Ring. Ist S ein einfacher A-Modul und $0 \neq x \in S$, so ist $S = Ax$, d.h. der Morphismus $\varphi_x : A \to S$, $a \mapsto ax$, ist surjektiv und daher $S \simeq A/\mathrm{Ker}\,\varphi_x$. Da S einfach, ist $\mathrm{Ker}\,\varphi_x$ maximal. Offensichtlich ist $\mathrm{Ker}\,\varphi_x = \mathrm{Ann}(S)$. Sind S' ein zu S isomorpher Modul, so ist $\mathrm{Ann}(S) = \mathrm{Ann}(S')$. Ist andererseits $M \in \mathrm{Max}\,A$, so ist A/M ein einfacher A-Modul mit $\mathrm{Ann}(A/M) = M$.

Ist $\mathrm{Simp}(S)$ die Klasse der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln, so sind also die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Simp}(A) &\longrightarrow \mathrm{Max}\, A \\ S &\longmapsto \mathrm{Ann}(S) \\ A/\mathfrak{m} &\longmapsfrom \mathfrak{m} \end{aligned}$$

paarweise invers. Insbesondere ist $\mathrm{Simp}(A)$ eine Menge.