7.5

Vorlesung 21 (13.01.16)

Satz[10] (Jordan-Hölder Theorem, starke Version) Sei V ein A-Modul endlicher Länge. Dann ist kanonisch

$$V \simeq \bigoplus_{M \in \operatorname{Max} A} V_M.$$

Ist $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \dots \supsetneq V_n = 0$ eine Kompositionsreihe und $M \in \operatorname{Max} A$, so ist

$$\#\{0 \le i < n \mid V_i/V_{i+1} \simeq A/M\} = \operatorname{length}(V_M).$$

Folglich ist die Multiplizität eines einfachen Moduls in einer Kompositionsreihe von V unabhängig von der Kompositionsreihe. Man schreibt dann $[V:S]$ dafür und nennt die S mit $[V:S] \neq 0$ die Kompositionsfaktoren von V. Die Kompositionsfaktoren sind in Bijektion mit $\operatorname{Supp} V$.

Beweis: Mit Induktion über $\operatorname{length}(V)$.
Sei $\operatorname{length}(V) = 1$, d.h. V ist einfach. Dann ist $V \simeq A/N$ für ein $N \in \operatorname{Max} A$. Da A/N Körper, operiert $A \setminus N$ mittels Einheiten auf A/N, also $V_N \simeq (A/N)_N \simeq A/N \simeq V$. Ist anderseits $M \in \operatorname{Max} A$ mit $M \neq N$, so gilt $N \not\subseteq M$ da N maximal, also $N + M = A$. Es existiert $n \in N$ mit $n \notin M \Rightarrow \frac{1}{n} \in N_M$. Ist nun $m \in M$, so folgt $m = mn \cdot \frac{1}{n} \in N_M \Rightarrow M \subseteq N_M$
$\Rightarrow M_M \subseteq N_M \Rightarrow A_M = (M+N)_M \subseteq M_M + N_M \subseteq N_M$, also $A_M = N_M$.
Daher ist $V_M \simeq (A/N)_M \simeq A_M/N_M = 0$. Das zeigt die Aussage für $\operatorname{length}(V) = 1$.

Sei nun $\operatorname{length}(V) > 1$. Sei $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \dots \supsetneq V_n = 0$ Kompositionsreihe. Sei $M \in \operatorname{Max} A$. Dann erhalten wir durch Lokalisierung eine Kette

$$V_M = (V_0)_M \supseteq (V_1)_M \supseteq \dots \supseteq (V_n)_M = 0$$

Da V_i/V_{i+1} einfach, ist $\operatorname{length}(V_i/V_{i+1}) = 1$. Nach Induktionsanfang gilt also

$$(V_i)_M/(V_{i+1})_M \simeq (V_i/V_{i+1})_M \cong \begin{cases} V_i/V_{i+1} & \text{falls } M = \operatorname{Ann}(V_i/V_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir erhalten also aus obiger Kette eine Kompositionsreihe von V_M, indem wir nur die Glieder betrachten, sodass $M = \operatorname{Ann}(V_i/V_{i+1})$, d.h. $V_i/V_{i+1} \simeq A/M$. Das zeigt insbesondere

$$\#\{i \mid V_i/V_{i+1} \simeq A/M\} = \operatorname{Length}(V_M).$$

Es bleibt nur noch der Isomorphismus $V \simeq \bigoplus_{M \in \operatorname{Max} A} V_M$ zu zeigen. Wir wissen nach oben, dass $V_M = 0$ für fast alle M, d.h. die Summe ist endlich. Die Lokalisierungsmorphismen $V \to V_M$ induzieren also einen Morphismus $\alpha: V \to \bigoplus_{M \in \operatorname{Max} A} V_M$. Es gilt $(V_M)_M = V_M$. Andererseits hat V_M nach oben nur Kompositionsfaktoren isomorph zu A/M, also $(V_M)_N = 0$ nach oben. Es folgt, dass $\alpha_N : V_N \to (\bigoplus_M V_M)_N = V_N$ die Identität ist für alle $N \in \operatorname{Max} A$, d.h. α ist lokal ein Isomorphismus, d.h. α ist selbst Isomorphismus. $\square$

7.6 Artinsche Ringe

Def[1]: Ein Ring A heißt *artinsch*, falls A artinscher A-Modul ist.

Bsp[2]: Eine endlich-dimensionale Algebra über einem Körper ist artinsch (7.4.4)

Bsp[3]: $\mathbb{Z}$ ist nicht artinsch (7.4.2).

Lemma[4]: Quotienten und Lokalisierungen artinscher Ringe sind artinsch.

Beweis: Analog zum noetherschen Fall, Lemma 7.3.4. □

Lemma[5]: Ist A artinsch und V endlich erzeugter A-Modul, so ist V artinsch.

Beweis: Analog zum noetherschen Fall, Lemma 7.3.5: A artinsch $\Rightarrow A^n$ artinsch $\forall n \in \mathbb{N}$. V endlich erzeugt $\Rightarrow V \cong A^n / U \Rightarrow V$ artinsch. □

Bem[6]: Es gibt artinsche Moduln, die nicht noethersch sind, siehe Übung. Für Ringe gilt aber:

Satz[7]: Für einen Ring A ist äquivalent:
a) A ist artinsch
b) A ist noethersch und alle Primideale sind maximal
In diesem Fall ist $\operatorname{Spec} A$ endlich.

Beweis:
a) $\Rightarrow$ b):
Beh: 0 ist Produkt maximaler Ideale.
Bew: Sei Σ die Menge aller Ideale, die Produkt von maximalen Idealen sind. Es ist $\Sigma \neq \emptyset$ und da A artinsch, existiert minimales Element $J \in \Sigma$. Wir zeigen $J = 0$. Ist $M \in \operatorname{Max} A$, so muss wegen der Minimalität von J bereits $MJ = J$ gelten. Insbesondere ist $J \subseteq M$, d.h. $J \subseteq \bigcap_{M \in \operatorname{Max} A} M = \operatorname{Jac}(A)$. Da $J^2 \in \Sigma$, gilt $J^2 = J$ wegen Minimalität von J. Angenommen, es wäre $J \neq 0$. Sei Ω die Menge aller Ideale I, die J nicht annihilieren d.h. $IJ \neq 0$. Es ist $\Omega \neq \emptyset$, da $J \in \Omega$ wegen $J^2 = J \neq 0$. Da A artinsch, hat Ω ein minimales Element I. Es gilt $(IJ)J = IJ^2 = IJ \neq 0$, also $IJ \in \Omega$, und da $IJ \subseteq I$, folgt $IJ = I$

wegen der Minimalität von I. Wegen $IJ \neq 0$ gibt es $f \in I$ mit $fJ \neq 0$, also $(f) \in \Omega$ und daher $I = (f)$ wegen der Minimalität von I. Da $IJ = I$, also $fJ = (f)$, gibt es $g \in J$ mit $gf = f$, d.h. $(1-g)f = 0$. Es gilt $g \in J \subseteq Jac(A)$, also ist $1-g$ eine Einheit nach Lemma 2.4.5. Dann würde aber $f = 0$ folgen ↯ Das zeigt die Behauptung.

Es gilt nun also $0 = M_1 \cdots M_t$ für gewisse $M_i \in \operatorname{Max} A$. Für jedes s ist $M_1 \cdots M_{s+1} \subseteq M_{s+1}$, daher ist $V_s := M_1 \cdots M_s / M_1 \cdots M_{s+1}$ ein A/M_{s+1}-Modul. Da A/M_{s+1} Körper, also ein Vektorraum. Ein Unterraum entspricht einem $M_1 \cdots M_{s+1}$ enthaltenden Ideal von A, eine Kette von Unterräumen also einer Kette von $M_1 \cdots M_{s+1}$ enthaltenden Idealen von A. Da A artinsch, ist folglich V_s ein artinscher Vektorraum. Dann ist dieser aber endlich-dimensional, denn sonst könnten wir nach Basiswahl eine unendliche absteigende Kette in V_s konstruieren. Folglich ist $\operatorname{length}(V_s) = \dim(V_s) < \infty$ und V_s hat eine Kompositionsreihe (als A/M_{s+1}-Modul). Eine Kompositionsreihe entspricht einer maximalen Kette von Idealen zwischen $M_1 \cdots M_{s+1}$ und $M_1 \cdots M_s$. Setzt man diese Kette über $1 \leq s < t$ zusammen, so erhält man maximale Kette zwischen 0 und A, also Kompositionsreihe von A:

$$0 = M_1 \cdots M_t \subseteq M_1 \cdots M_{t-1} \subseteq M_1 \cdots M_{t-2} \cdots \subseteq M_1 \subseteq A.$$

Also ist A noethersch nach Satz 7.5.8.
Sei nun $P \in \operatorname{Spec} A$. Da $P \supseteq 0 = M_1 \cdots M_t$ und P prim, ist $P \supseteq M_i$ für ein i. Da M_i maximal, ist also P maximal. Weiterhin ist jedes Primideal daher gleich einem der $M_1, \dots, M_t$, insbesondere gibt es also nur endlich viele.

<u>b) ⇒ a)</u>: Angenommen, A nicht artinsch, also A nicht von endlicher Länge nach Satz 7.5.8. Sei Σ die Menge der Ideale I von A mit

A/I nicht von endlicher Länge. Es ist $\Sigma \neq \emptyset$ da $0 \in \Sigma$. Da A noethersch, hat Σ maximales Element I

Beh: I ist prim.

Bew: Seien $a, b \in I$ mit $ab \in I$ und $a \notin I$. Müssen $b \in I$ zeigen. Sei

$$(I:a) := \{ x \in A \mid xa \in I \} \trianglelefteq A.$$

Dann erhalten wir exakte Sequenz

$$0 \to A/(I:a) \xrightarrow{\cdot a} A/I \longrightarrow A/(I+(a)) \longrightarrow 0$$

Da $I+(a) \supsetneq I$ und $I \in \Sigma$ maximal, ist $I+(a) \notin \Sigma$, also $A/I+(a)$ hat endliche Länge. Nun angenommen, $b \notin I$. Da $ab \in I$, ist $b \in (I:a)$, also $(I:a) \supsetneq I$, daher auch $A/(I:a)$ von endlicher Länge. Nun folgt wegen der Sequenz oben, dass A/I ebenfalls endliche Länge hat. ↯ zu $I \in \Sigma$. Also $b \in I$. Damit I prim.

Da nach Annahme alle Primideale maximal, ist I maximal. Dann ist aber A/I Körper und damit von endlicher Länge ↯ zu $I \in \Sigma$. Also muss A von endlicher Länge sein, und damit artinsch nach Satz 7.5.8 $\square$