Vorlesung 22 (18.01.16)

8. Dimensionstheorie

8.1. Krull-Dimension

Idee[1]: Die Länge eines Moduls misst, wie weit sich Untermoduln schachteln lassen und ist damit ein Maß für dessen "Komplexität". Die Dimension eines Rings misst, wie weit sich "Nullstellenmengen", d.h. Primideale, schachteln lassen und ist damit ein Maß für dessen "Komplexität".

Def.[2]: Die Krull-Dimension $\dim A$ eines Rings A ist das Supremum der Längen von Ketten von Primidealen in A.

Diese Definition hat lokalen Charakter:

Lemma[3]: $\dim A = \sup_{P \in \operatorname{Spec} A} \dim A_P$

Beweis: Es ist $\operatorname{Spec} A_P \simeq \{Q \in \operatorname{Spec} A \mid Q \subseteq P\}$. Eine Kette der Länge n in $\operatorname{Spec} A_P$ entspricht also einer Kette der Länge n in $\operatorname{Spec} A$, daher $\sup \dim A_P \leq \dim A$. Ist andererseits $P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n =: P$ Kette in A, so gibt das Kette der Länge n in $\operatorname{Spec} A_P \Rightarrow \sup \dim A_P \geq \dim A$. □

Lemma[4]: Ist $I \trianglelefteq A$, so ist $\dim A/I \leq \dim A$.

Beweis: Wegen $\operatorname{Spec} A/I \simeq \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \supseteq I\}$ ist jede Primidealkette in A/I auch eine in A. □

Achtung[5]: Es gibt noethersche Ringe A mit $\dim A = \infty$ und nicht-noethersche Ringe A mit $\dim A < \infty$!

Bsp[6]: Ist K ein Körper, so ist $\dim K = 0$

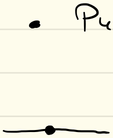
Bsp[7]: Sei A noethersch. Satz 7.67 $\rightsquigarrow$ $\dim A = 0 \Leftrightarrow A$ artinsch.

Bsp[8]: Ist K ein Körper, so ist $\dim K[X] = 1$:

$(X) \rightsquigarrow$ Punkt

$\cup\!\!\!\!\!\neq$

$(0) \rightsquigarrow$ affine Linie



d.h. $\dim K[X] \geq 1$. Da $K[X]$ aber Hauptidealring, ist jedes Primideal $\neq 0$ maximal, d.h. in der Tat $\dim K[X] = 1$

Bsp[9]: Ist A ein Hauptidealring und kein Körper, so ist $\dim A = 1$. $\Rightarrow \dim \mathbb{Z} = 1$.

Bsp[10]: Ist K ein Körper, so ist $\dim K[X,Y] = 2$:

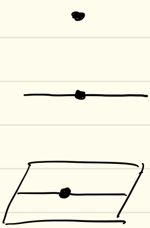
$(X,Y) \rightsquigarrow$ Punkt

$\cup\!\!\!\!\!\neq$

$(X) \rightsquigarrow$ affine Linie

$\cup\!\!\!\!\!\neq$

$(0) \rightsquigarrow$ affine Ebene



d.h. $\dim K[X,Y] \geq 2$. Aus Übung 11.4 folgt in der Tat $\dim K[X,Y]$.

Bsp[11]: Ist allgemeiner R ein Hauptidealring und kein Körper, so zeigt Übung 11.4, dass $\dim R[X] = 2 = \dim R + 1$. $\Rightarrow \dim \mathbb{Z}[X] = 2$.

8.2 Dimension von Polynomringen über Körpern

Satz[1]: Ist K ein Körper, so ist $\dim K[X_1,\dots,X_n] = n$.

Für den Beweis benötigen wir folgendes einfache Lemma:

Lemma[2]: Ist A ein faktorieller Ring, so sind alle minimalen Primideale bereits Hauptideale.

Beweis: Sei P minimales Primideal. Wähle $0 \neq x \in P$ und sei $x = p_1 \cdots p_n$ Primfaktorisierung. Da P prim und $x \in P$, ist $p_i \in P$ für ein i. Da p_i prim, ist (p_i) Primideal. Dies ist ungleich Null und in P enthalten, also ist schon $(p_i) = P$ wegen der Minimalität von P. $\square$

Beweis von Satz: Mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Der Fall $n = 0$ ist klar. Sei also $n > 0$. Wir haben eine Primidealkette

$$(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \dots \subsetneq (X_1,\dots,X_n),$$

daher ist $\dim K[X_1,\dots,X_n] \geq n$. Sei nun $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_r$ beliebige Primidealkette. Wir zeigen, dass $r \leq n$ gilt. Ist $P_0 \neq 0$, so verlängern wir die Kette, können also oBdA $P_0 = 0$ annehmen. Ist P_1 kein minimales Primideal, so wählen wir minimales Primideal P in A_{P_1} (existiert nach Übung 3.1c) und fügen das vor P ein ($P \subseteq P_1$). Wir können also oBdA annehmen, dass P_1 minimales Primideal ist. Da $K[X_1,\dots,X_n]$ faktoriell (induktiv: Polynomring in einer Variablen über faktoriellem Ring ist faktoriell), folgt aus dem Lemma oben, dass $P_1 = (f)$ für ein $0 \neq f \in P_1$.

Sei $e \in \mathbb{N}_{>1}$ beliebig und setze $Y_i := X_i - X_n^{e^i}$ für $1 \leq i < n$.

Ist $m = X^\nu = X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$ ein Monom von f, so gilt

$$m = X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} = (Y_1 + X_n^{e})^{\mu_1} \cdot (Y_2 + X_n^{e^2})^{\mu_2} \cdots (Y_{n-1} + X_n^{e^{n-1}})^{\mu_{n-1}} \cdot X_n^{\mu_n}$$

$$= \underbrace{X_n^{\mu_1 e + \mu_2 e^2 + \dots + \mu_{n-1} e^{n-1} + \mu_n}}_{\text{Grad } d_{\mu,e} := \mu_1 e + \mu_2 e^2 + \dots + \mu_{n-1} e^{n-1} + \mu_n} + \underbrace{\dots + Y_1^{\mu_1} \cdots Y_{n-1}^{\mu_{n-1}} X_n^{\mu_n}}_{\text{kleinerer Grad}}$$

$\Rightarrow m$ ist normiertes Polynom in $Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n$ mit Leitterm $X_n^{d_{\mu,e}}$

Wählt man $e > \mu_i \ \forall i$, so sind die μ_i die Ziffern der Darstellung von $d_{\mu,e}$ in der Basis e. Sind also X^μ und X^ν Monome von f mit $X^\mu \neq X^\nu$ und wählt man $e > \mu_i, \nu_i \ \forall i \Rightarrow d_{\mu,e} \neq d_{\nu,e}$.

Wählt man nun $e > \mu_i \ \forall i$ und für alle μ, sodass X^μ Monom von f, so sieht man, dass f ein Polynom in $Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n$ ist mit Leitterm αX_n^d mit $0 \neq \alpha \in K$ und $d = \max\{d_{\mu,e}\}$. Ist $\alpha \neq 1$, so ersetze f durch $\alpha^{-1} f$. Es ist dann immer noch $P_1 = (f)$ und f ist nun normiert als Poly. in $Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n$. Sei $g \in (K[Y_1, \dots, Y_{n-1}])[X]$ das Polynom, das aus f entsteht, wenn man X_n durch eine neue Variable X ersetzt. Dies ist normiert und $g(X_n) = f$, d.h. $g(X_n) - f = 0$.

$\Rightarrow X_n \in K[X_1, \dots, X_n]$ ist ganz über $A := K[Y_1, \dots, Y_{n-1}, f] \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$

$\Rightarrow A[X_n]$ ist ganz über A

Da $Y_i = X_i - X_n^{e^i}$, ist aber $A[X_n] = K[Y_1, \dots, Y_{n-1}, f, X_n] = K[X_1, \dots, X_n]$,

d.h. $K[X_1, \dots, X_n]$ ist ganz über $K[Y_1, \dots, Y_{n-1}, f] = A$.

Wir haben jetzt eine Primidealkette $0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_r$ in $K[X_1, \dots, X_n]$ mit $f \in P_1$. Wir erhalten dann Kette

$$0 = P_0' \subseteq P_1' \subseteq \dots \subseteq P_r'$$

in $\operatorname{Spec} A$ mit $P_i' := P_i \cap A$. Da aber $A \subseteq K[X_1,..,X_n]$ ganz, sind die Inklusionen immer noch strikt (Incomparability, Satz 5.4.4). Da f erhalten wir nach Rausteilen von f eine Kette der Länge $r-1$ in $A/(f) = K[Y_1,..,Y_{n-1},f]/(f) \simeq K[Y_1,..,Y_{n-1}]$. Diese Algebra wird von $n-1$ Elementen erzeugt, ist also Quotient eines Polynomrings $K[X_1,..,X_{n-1}]$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\dim K[X_1,..,X_{n-1}] = n-1$. Damit ist $\dim A/(f) \leq n-1$ nach Lemma 8.1.4, folglich

$$\dim A/(f) \leq n-1 \Rightarrow r-1 \leq n-1 \Rightarrow r \leq n. \qquad \square$$