8.2

Vorlesung 23 (20.01.17)

Letztes Mal:

Satz[2]: Ist K ein Körper, so ist $\dim K[X_1,..,X_n]=n$.

Nachtrag zum Beweis:

Lemma[1]: Ist A ein faktorieller Ring, so sind alle minimalen Primideale $\neq 0$ bereits Hauptideale.

Beweis: Sei P minimales Primideal. Wähle $0\neq x\in P$ und sei $x=p_1\cdots p_n$ Primfaktorisierung. Da P prim und $x\in P$, ist $p_i\in P$ für ein i. Da p_i prim, ist (p_i) Primideal. Dies ist ungleich Null und in P enthalten, also ist schon $(p_i)=P$ wegen der Minimalität von P. $\square$

Korollar zum Satz[3]: Ist A eine K-Algebra endlichen Typs, so ist $\dim A<\infty$.

Beweis: Folgt sofort aus dem Satz und Lemma 8.1.4 ($\dim A/I\leq \dim A$). $\square$

Bem[4]: Wir haben im Beweis des Satzes gezeigt: Ist $f\in K[X_1,..,X_n]$ ein nicht konstantes Polynom, so gibt es Elemente $Y_1,..,Y_{n-1}\in K[X_1,..,X_n]$, sodass $K[X_1,..,X_n]$ endlich erzeugter $K[Y_1,..,Y_{n-1},f]$-Modul ist. Man kann $Y_i=X_i-X_n^{e^i}$, für e genügend groß, wählen.

8.3 Kodimension

Def[1]: Ist $I\trianglelefteq A$, so heißt $\dim I:=\dim A/I$ die Dimension von I. Also $\dim I=$ Supremum der Längen von Primidealketten $I\subseteq P_0\subsetneq\cdots\subsetneq P_n$.
Haben bereits gesehen (Lemma 8.1.4), dass $\dim I\leq \dim A$.

Frage[2]: Was ist die Differenz $\dim A - \dim I$?

Def.[3]: Die Kodimension von $P \in \operatorname{Spec} A$ in A ist das Supremum der Längen von Primidealketten $P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n = P$. Man schreibt $\operatorname{codim}_A P$ oder kürzer (aber gefährlicher!) $\operatorname{codim} P$ dafür.
Anstatt Kodimension sagt man auch Höhe, geschrieben $\operatorname{ht} P$.
Also: „$\operatorname{ht} P$ = Höhe von P über dem Nullideal."

Lemma[4]: $\operatorname{codim}_A P = \dim A_P$.

Beweis: Folgt sofort, da $\operatorname{Spec} A_P = \{Q \in \operatorname{Spec} A \mid Q \subseteq P\}$. □

Def.[5]: Allgemeiner definiert man für $I \trianglelefteq A$ die Kodimension von I als

$$\operatorname{codim}_A I := \inf_{\substack{P \supseteq I \\ \text{minimal}}} A_P.$$

Lemma: Für jedes $I \trianglelefteq A$ gilt

$$\dim I + \operatorname{codim}_A I \leq \dim A.$$

Beweis: Sei zunächst $P \in \operatorname{Spec} A$. Ist $P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n = P$ beliebige Primidealkette und $P = P_{n+1} \subsetneq \ldots \subsetneq P_{n+m}$ beliebige Primidealkette, so ist $n + m \leq \dim A$. Daraus folgt $\dim P + \operatorname{codim} P \leq \dim A$. Es existiert dann $P \supseteq I$ minimal mit $\dim I = \dim P$. Wir wissen nun

$$\begin{aligned}\dim A &\geq \dim P + \operatorname{codim} P = \dim I + \operatorname{codim} P \\ &\geq \dim I + \inf_{\substack{P \supseteq I \\ \text{minimal}}} \operatorname{codim} P.\end{aligned}$$

□

Bsp: Im Allgemeinen gilt keine Gleichheit!!

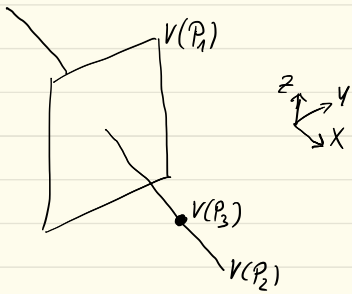
Sei $A := K[X,Y,Z]$. Sei $P_1 := (X)$

$P_2 := (Y, Z)$ $\rightsquigarrow P_2 \subseteq P_3$.

$P_3 := (X+1, Y, Z)$.

Sei $B := A/(P_1 \cdot P_2) = K[X,Y]/(XY, XZ)$

$\rightsquigarrow \operatorname{Spec} B \simeq V(P_1 \cdot P_2) = V(P_1) \cup V(P_2)$. dh $\operatorname{Spec} B$ hat irreduzible Komponenten $V(P_1)$ und $V(P_2)$.

$\rightsquigarrow \operatorname{Spec} B =$ 

$$\dim P_1 = \dim K[X,Y,Z]/(X) = \dim K[Y,Z] = 2$$
$$\dim P_2 = \dim K[X,Y,Z]/(Y,Z) = \dim K[X] = 1$$
$$\dim P_3 = \dim K[X,Y,Z]/(X+1,Y,Z) = \dim K[X]/(X+1) = \dim K = 0$$

$\Rightarrow \dim B = \sup_{i=1,2} \dim V(P_i) = 2$. ($P_1, P_2$ sind die minimalen Primideale in B)

Es gilt $\operatorname{codim}(P_3, A) \geq 3$, denn $(X+1, Y, Z) \supsetneq (Y, Z) \supsetneq (Y) \supsetneq (0)$ z.B.

Da $\dim A = 3$, gilt $\operatorname{codim}(P_3, A) = 3$ und damit

$$\underbrace{\dim P_3}_{=0} + \underbrace{\operatorname{codim}(P_3, A)}_{=3} = \underbrace{\dim A}_{=3}.$$

Da $P_2 \subseteq P_3 \Rightarrow P_1 \cdot P_2 \subseteq P_3 \Rightarrow P_3 \in \operatorname{Spec} A/P_1 \cdot P_2 = \operatorname{Spec} B$.

Können daher auch $\operatorname{codim}(P_3, B)$ betrachten

Es ist $\operatorname{codim}(P_3, B) = \operatorname{codim}(P_3, A/P_1 \cdot P_2)$

= supremum von Längen von Primidealketten zwischen $P_1 \cdot P_2$ und P_3

Da $P_1 \nsubseteq P_3$ ist das gleich dem Supremum der Ketten von Primidealen zwischen P_2 und P_3. Es ist aber

$$\left(A/P_2\right)/P_3 = \left(K[X,Y,Z]/(Y,Z)\right)/(1+X,Y,Z) \cong K[X]/(1+X) \simeq K,$$

dh. P_3 maximal in A/P_2, d.h. $P_2 \subsetneq P_3$ ist die einzige Kette

$$\Rightarrow \operatorname{codim}(P_3, B) = 1.$$

Also:

$$\dim P_3 + \operatorname{codim}(P_3, B) = 0 + 1 < 2 = \dim B.$$

//

<u>Frage</u>: Was ist das Problem? Angenommen, es ist $\dim I + \operatorname{codim} I < \dim A$. Es muss dann $\dim I < \infty$ und $\operatorname{codim} I < \infty$ sein. Es existiert also maximale Kette $P = P_n \supsetneq \dots \supsetneq P_0$ mit $P \supseteq I$ minimal und $n = \operatorname{codim} I$ und es existiert maximale Kette $I \subseteq P = P_n \subsetneq P_{n+1} \subsetneq \dots \subsetneq P_{n+m} \Rightarrow \dim I \geq m$. Nun ist $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_{n+m}$ maximale Kette in $\operatorname{Spec} A$ und es gilt

$$n + m \leq \operatorname{codim} I + \dim I < \dim A.$$

d.h. es muss noch eine maximale Kette in Spec A größerer Länge geben.
Dies zeigt im Umkehrschluss:

<u>Lemma:</u> Haben alle maximalen Ketten in Spec A dieselbe Länge, so gilt

$$\dim I + \operatorname{codim} I = \dim A$$

für alle $I \trianglelefteq A$. □

<u>Def:</u> Einen Ring, sodass alle maximalen Primidealketten dieselbe Länge haben, nennt man bi-äquidimensional.

<u>Bsp:</u> Artinsche Ringe sind offensichtlich bi-äquidimensional. Genau so Hauptidealringe
$\Rightarrow K[X], \mathbb{Z}$ biäquidimensional.

Wir wollen zeigen:

<u>Satz:</u> Ist K ein Körper, so ist $K[X_1,.., X_n]$ bi-äquidimensional. Insbesondere gilt

$$\dim I + \operatorname{codim} I = \dim K[X_1, \dots X_n] = n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Diese Eigenschaft ist sehr hilfreich in Anwendungen. Für den Beweis benötigen wir allerdings zunächst noch ein paar allgemeine Werkzeuge.