Vorlesung 24 (25.01.17)

8.4. Transzendenzgrad

Zunächst führen wir einen neuen Begriff von "Dimension" ein.
Durchweg sei K ein Körper.
Wir können den Quotientenkörper $K(X_1, \dots, X_n) := Q(K[X_1, \dots, X_n])$ bilden.
Das ist ein Erweiterungskörper von K, aber für $n > 0$ nicht endlich-dimensional. Trotzdem ist man geneigt, zu sagen, dass es "Dimension" n über K hat. Jetzt präzise:

Def:[1] Eine Familie $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Elementen einer K-Algebra A heißt *algebraisch abhängig*, falls ein Polynom $f \in K[(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$ existiert, sodass $f((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = 0$.
Gibt es das nicht, so heißt die Familie *algebraisch abhängig*.

Bem:[2] $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ algebraisch unabhängig $\Leftrightarrow$ Der K-Algebrenmorphismus $K[(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}] \to A$ bestimmt durch $X_\lambda \mapsto a_\lambda$ ist injektiv.

Def:[3] Sei L ein Erweiterungskörper von K ($\Rightarrow L$ ist K-Algebra). Eine *Transzendenzbasis* von L über K ist ein maximales Element in der Menge der über K algebraisch unabhängigen Teilmengen von L.

Achtung:[4] Obwohl das "Basis" heißt, hat es nichts mit Erzeugendensystem zu tun: $K \subseteq L$ ist algebraisch $\Leftrightarrow$ $\{x\}$ algebraisch abhängig über K $\forall x \in L$
$\Leftrightarrow$ alle Teilmengen von L sind algebraisch abhängig über K
$\Leftrightarrow$ die leere Menge ist Transzendenzbasis von L über K.
Dieser Begriff ist wirklich für unendliche Erweiterungen gemacht.

Lemma:[5] Eine Transzendenzbasis von $K(X_1, \dots, X_n)$ über K ist $\{X_1, \dots, X_n\}$.

Beweis: Die Familie $\{X_1,\dots,X_n\} \subseteq K[X_1,\dots,X_n]$ ist algebraisch unabhängig über K nach Definition. Da $K[X_1,\dots,X_n] \subseteq K(X_1,\dots,X_n)$, ist das also auch algebraisch unabhängige Familie in $K(X_1,\dots,X_n)$. Ein beliebiges Element von $K(X_1,\dots,X_n)$ ist nun von der Form $\frac{f}{g}$ mit $f,g \in K[X_1,\dots,X_n]$ und $g \neq 0$. Die Menge $\{X_1,\dots,X_n, \frac{f}{g}\}$ ist jetzt aber algebraisch abhängig über K, denn

$$\begin{aligned} K[Y_1,\dots,Y_{n+1}] &\to K(X_1,\dots,X_n) \\ Y_i &\mapsto X_i \\ Y_{n+1} &\mapsto \frac{f}{g} \end{aligned}$$

ist nicht injektiv, denn $g(Y_1,\dots,Y_n)\cdot Y_{n+1} - f(Y_1,\dots,Y_n) \mapsto g\cdot\frac{f}{g} - f = 0$.
Also ist $\{X_1,\dots,X_n\}$ maximale algebraisch unabhängige Teilmenge. $\square$

Lemma:[6] Eine algebraisch unabhängige Teilmenge $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L$ ist Transzendenzbasis genau dann, wenn die Erweiterung $K((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \subseteq L$ algebraisch ist (Hierbei ist $K((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ der kleinste $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ enthaltende Unterkörper von L).

Beweis: Klar. $\square$

Satz:[7] Sei L ein Erweiterungskörper von K. Dann hat L eine Transzendenzbasis über K und je zwei haben die gleiche Kardinalität. Jede algebraisch unabhängige Teilmenge kann zu einer Transzendenzbasis erweitert werden.

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ die Menge der über K algebraisch unabhängigen Teilmengen von L. Dann ist $\emptyset \in \mathcal{B}$, also $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Ist $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aufsteigende Kette, so ist offensichtlich auch $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda \in \mathcal{B}$ und das ist ein Supremum der Kette. Nach Zorns Lemma hat $\mathcal{B}$ also ein maximales Element, d.h. eine Transzendenzbasis. Analog sieht man, dass es über jeder algebraisch unabhängige Teilmenge eine Transzendenzbasis geben muss. Bleibt zu zeigen, dass alle Transzendenzbasen dieselbe Kardinalität haben. Zunächst zeigen wir mit Induktion über $m \in \mathbb{N}$ folgendes:

Beh: Ist $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sind B, B' endliche Transzendenzbasen mit $m = |B'| \le |B|$, so ist bereits $|B'| = |B|$.

Bew: Sei $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und $B' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Ist $m = 0$, so ist $K \subseteq L$ algebraisch, daher auch $B = \emptyset$ und $n = 0$. Sei also $m > 0$. Dann gibt es β_i mit $\beta_i \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Sei oBdA $i = 1$. Dann ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1\}$ algebraisch abhängig wegen des Maximalität von B. Es gibt also $f \in K[X_1, \ldots, X_n, Y]$ mit $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1) = 0$. Da $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ alg. unabhängig, muss Y in f auftreten. Da β_1 nicht algebraisch über K, muss weiterhin ein X_j in f auftreten. Sei oBdA $j = 1$ und setze $B^* := \{\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1\}$. Wir haben nun einen Turm algebraischer Erweiterungen

$$K(B^*) \underset{\substack{\text{algebraisch} \\ \text{mittels } f}}{\subseteq} K(\underbrace{B^* \cup \{\alpha_1\}}_{\text{enthält } B}) \underset{\substack{\text{algebraisch} \\ \text{da } B \text{ Transzendenzbasis}}}{\subseteq} L$$

Die Menge B^* ist algebraisch unabhängig, denn: falls nicht, gibt es $g \in K[X_2, \ldots, X_n, Y]$ mit $g(\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1) = 0$. Da $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ algebraisch unabhängig, muss Y in g auftreten. Dann ist aber β_1 algebraisch über $K(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Dann ist aber $K(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \subseteq K(B^*)$ algebraisch und damit $K(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \subseteq L$ algebraisch $\Rightarrow \alpha_1$ algebraisch über $K(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ↯

Also B^* algebraisch unabhängig. Die Menge $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ und $\{\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}\}$ sind algebraisch unabhängig über $K(\beta_1)$ und da

$$K(\beta_1)(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) = K(B^*) \subseteq L \quad \text{algebraisch}$$

$$K(\beta_1)(\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}) = K(B) \subseteq L \quad \text{algebraisch}$$

sind das beides Transzendenzbasen von L über $K(\beta_1)$. Die Induktionsvoraussetzung impliziert nun $m-1 = n-1$, also $m = n$. Das zeigt die Behauptung.

Nun zurück: Seien B, B' zwei Transzendenzbasen von L über K. OBdA sei $|B'| \le |B|$. Ist B endlich, so folgt $|B'| = |B|$ mit der Behauptung oben.

Sei also $|B| = \infty$. Für jedes $\beta \in B'$ gibt es endliche Teilmenge $B_\beta \subseteq B$, sodass β algebraisch über $K(B_\beta)$, da algebraische Relationen durch Polynome gegeben sind und diese haben nur endlich viele Terme. Sei $B^* := \bigcup_{\beta \in B'} B_\beta$. Es ist $B^* \subseteq B$. In der Tat gilt aber Gleichheit: Angenommen, nicht. Dann gibt es $\alpha \in B \setminus B^*$. Wissen: α ist algebraisch über $K(B')$, da B' Transzendenzbasis. Weiterhin ist $K(B')$ nach Konstruktion algebraisch über $K(B^*)$. Also ist α algebraisch über $K(B^*)$, $\lightning$ zu B algebraisch unabhängig. $\rightarrow$ $|B| = |B^*| = \left|\bigcup_{\beta \in B'} B_\beta\right| = |B'|$, da jedes B_β endlich. $\square$

Def.[8] Man nennt die Kardinalität einer (und damit jeder) Transzendenzbasis von L über K den Transzendenzgrad von L über K, geschrieben $\mathrm{trdeg}_K L$.

Bsp.[9] $\mathrm{trdeg}_K K(X_1, \dots, X_n) = n$.

Allgemeiner definieren wir:

Def.[10] Der Transzendenzgrad einer nullteilerfreien K-Algebra A ist definiert als $\mathrm{trdeg}_K A := \mathrm{trdeg}_K Q(A)$.

8.5 Krull-Dimension und Transzendenzgrad

Satz (Noether Normalisierung)[1]: Sei A eine Algebra endlichen Typs über einem Körper K.

a) Es existieren algebraisch unabhängige $Y_1, \dots, Y_d$ sodass A endlicher Modul über $K[Y_1, \dots, Y_d]$ ist.

b) Ist $I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_m$ Idealkette in A mit $d_j := \dim I_j$ und $d_1 > d_2 > \dots > d_m > 0$, so lassen sich die Y_i in a) so wählen, dass
$$I_j \cap K[Y_1, \dots, Y_d] = (Y_{d_j+1}, \dots, Y_d) \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

<u>Beweis:</u> Sei zunächst $A = K[X_1,..,X_d]$ ein Polynomring. Beginnend mit $e=d$ konstruiere wir induktiv für jedes $0 \le e \le d$ Elemente $Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)}$ und Y_{e+1}, sodass gilt:
(1) A ist endl. erzeugter Modul über $B_e := K[Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)},Y_{e+1},..,Y_d]$.
(2) $I_j \cap B_e \supseteq (Y_{h_j^{(e)}},..,Y_d)$ $\forall 1 \le j \le m$, wobei $h_j^{(e)} := \max\{d_j+1, e+1\}$

Start, $e=d$: Setze $Y_i^{(e)} := X_i$ $\forall 1 \le i \le d$ und $Y_{e+1} := 1$ (nicht benötigt)

Schritt $e \to e-1$ falls $d > e > d_m$: Sei k der kleinste Index mit $e > d_k$. Es gilt $h_k^{(e)} = e+1$ und daher $I_k \cap B_e \supseteq (Y_{e+1},..,Y_d)$ nach (2).
Wir zeigen, dass $I_k \cap K[Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)}] \neq 0$. Angenommen, nicht. Dann muss $I_k \cap B_e = (Y_{e+1},..,Y_d)$ als Ideale in B_e gelten. Es ist

$$\dim (Y_{e+1},..,Y_d) = \dim K[Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)},Y_{e+1},..,Y_d]/(Y_{e+1},..,Y_d)$$

$$= \dim K[Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)}]$$

$$\overset{(*)}{=} e$$

$\llcorner$ $Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)}$ müssen algebraisch unabhängig sein, denn sonst wäre $\operatorname{trdeg}_K B_e < d = \operatorname{trdeg}_K A$ $\lightning$ zu $B_e \subseteq A$ endlich nach (1)
$\Rightarrow \dim K[Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)}] = e$ nach Satz 8.2.1

(1) impliziert weiterhin, dass $B_e \subseteq A$ ganz und daher

$$d_j = \dim I_j = \dim I_j \cap B_e = e$$

nach Aufgabe 12.3. $\lightning$ zu $e > d_j$

Wir können also nicht konstantes $Y_e \in I_k \cap K[Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)}]$ wählen. Nach Bemerkung 8.2.4 gibt es Elemente $Y_1^{(e-1)},..,Y_{e-1}^{(e-1)}$, sodass $K[Y_1^{(e)},..,Y_e^{(e)}]$ endlich erzeugter $K[Y_1^{(e-1)},..,Y_{e-1}^{(e-1)},Y_e]$-Modul. Mit diesen Elementen bekommen wir

$B_{e-1} \subseteq B_e$ endlich $\Rightarrow B_{e-1} \subseteq A$ endlich, d.h. (1) gilt. Eigenschaft (2) ist klar, da B_{e-1} die Elemente $y_e, .., y_d$ enthält und $h_j^{(e)} - h_j^{(e-1)} \leq 1$, d.h. im Schritt $e \to e-1$ kommt in den Schnitten höchstens y_e dazu.

Schritt $e \to e-1$ falls $e \leq d_m$: In diesem Fall setze $y_e := y_e^{(e)}$ und $y_i^{(e-1)} := y_i^{(e)}$ für alle i. Erfüllen offensichtlich die Bedingungen.

Habe nun Elemente $y_1, .., y_d$ mit $K[y_1, .., y_d] \subseteq A$ endlich und $I_j \cap K[y_1, .., y_d] \supseteq (y_{d_j+1}, .., y_d)$ $\forall j$. Wie oben sieht man

$$\dim I_j \cap K[y_1, .., y_d] = \dim (y_{d_j+1}, .., y_d)$$

Nun ist aber $(y_{d_j+1}, .., y_d)$ Primideal. Wäre also $I_j \cap K[y_1, .., y_d] \supsetneq (y_{d_j+1}, .., y_d)$, so könnte man jede Primidealkette über $I_j \cap K[y_{d_j+1}, .., y_d]$ noch mit $(y_{d_j+1}, .., y_d)$ verlängern $\Rightarrow$ Widerspruch zur Gleichheit der Dimension. Zeigt die Aussage für Polynomringe.

Sei nun A allgemein, $A = K[X_1, .., X_d]/I$. Sei I_j' das Urbild unter $K[X_1, .., X_d] \twoheadrightarrow A$. Setze $I_0' := I$. Erhalte Idealkette $I_0' \subsetneq \cdots \subsetneq I_m'$ in $K[X_1, .., X_d]$. Satz für Polynomringe gibt $y_1, .., y_d$ mit $K[y_1, .., y_d] \subseteq K[X_1, .., X_d]$ endlich und $I_j' \cap K[y_1, .., y_d] = (y_{d_j+1}, .., y_d)$, $d_j := \dim I_j' = \dim I_j$. Insbesondere ist

$$\Rightarrow I_j' \cap K[y_1, .., y_{d_0}] = (y_{d_j+1}, .., y_{d_0})$$

$$\Rightarrow I_0' \cap K[y_1, .., y_{d_0}] = 0.$$

Da $K[y_1, .., y_d] \subseteq K[X_1, .., X_d]$ endlich, ist

$$K[y_1, .., y_{d_0}] = K[y_1, .., y_d]/I \cap K[y_1, .., y_d] \hookrightarrow K[X_1, .., X_d]/I = A$$

endlich. Offensichtlich gilt nun die Behauptung mit dieser Unteralgebra. $\square$