Vorlesung 25 (27.01.17)

Korollar:[2] Ist A nullteilerfreie K-Algebra endlichen Typs, so ist

$$\dim A = \operatorname{trdeg}_{K} A.$$

Beweis: Nach dem Satz existieren algebraisch unabhängige $Y_1, \ldots, Y_d \in A$ sodass $K[Y_1, \ldots, Y_d] \subseteq A$ endlich ist. Es folgt sofort

$$\operatorname{trdeg}_K A = \operatorname{trdeg}_K K[Y_1, \ldots, Y_d] = d = \dim K[X_1, \ldots, X_n] = \dim A.$$

□

8.6. Bi-äquidimensionalität von Polynomringen über Körpern

Satz (Going down)[1] Sei $A \subseteq B$ ganze Erweiterung von Integritätsbereichen mit A normal. Ist $P_1 \supseteq \ldots \supseteq P_n$ Kette von Primidealen in A und $Q_1 \supseteq \ldots \supseteq Q_m$ Kette von Primidealen in B, $m < n$, mit $Q_i \cap A = P_i$ $\forall i$, so lässt sich die Kette in B zu $Q_1 \supseteq \ldots \supseteq Q_n$ erweitern mit $Q_i \cap A = P_i$ $\forall i$.

Beweis: Hier ohne Beweis; ist aber elementar, siehe Atiyah-Macdonald Thm 5.16 □

Satz:[2] Ist K ein Körper, so ist $K[X_1, \ldots, X_n]$ bi-äquidimensional. Für jedes $I \trianglelefteq K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt also:

$$\dim I + \operatorname{codim} I = \dim K[X_1, \ldots, X_n] = n.$$

Beweis: Müssen zeigen, dass alle maximalen Primidealketten dieselbe Länge (also n) haben. Sei $Q_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_m$ Primidealkette. Es gilt $m \leq n$. Wir zeigen, dass man im Fall $m < n$ die Kette verlängern kann. Nach Satz 8.5.1 existieren algebraisch unabhängige $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $P_i := Q_i \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] = (Y_{d_j+1}, \ldots, Y_n)$, wobei

$d_i = \dim Q_i$. Wegen $m<n$ folgt sofort, dass es ein i gibt, sodass noch ein Primideal P zwischen P_{i-1} und P_i eingefügt werden kann. Sei $A := K[Y_1,\dots,Y_n]/P_{i-1}$ und $B := K[X_1,\dots,X_n]/Q_{i-1}$. Die Erweiterung $A \subseteq B$ ist endlich daher ganz. Weiterhin ist A ein Polynomring, also normal. Going down angewandt auf $P_i/P_{i-1} \supsetneq P/P_{i-1}$ liefert ein Primideal Q/Q_{i-1} in B/Q_i mit $Q_i/Q_{i-1} \supsetneq Q/Q_{i-1}$:

$$\begin{array}{lcl} B: & Q_i/Q_{i-1} & \supsetneq \exists\, Q/Q_{i-1} \\ & | & \\ A: & P_i/P_{i-1} & \supsetneq P/P_{i-1} \end{array}$$

Q_i ist nun Primideal in B mit $Q_i \supsetneq Q \supsetneq Q_{i-1}$, d.h. die Kette in B kann verlängert werden □

8.7 Krulls Hauptidealsatz

Jetzt wieder allgemeine Theorie.

Def[1]: Sei A ein Ring. Die *n-te symbolische Potenz* von $P \in \operatorname{Spec} A$ ist

$$P^{(n)} := \{a \in A \mid as \in P^n \text{ für ein } s \in A \setminus P\}.$$

Lemma[2]: $P^{(n)}$ ist das Urbild von $(PA_P)^n \trianglelefteq A_P$ unter $A \to A_P$ und daher ist $P^{(n)}A_P = (PA_P)^n$.

Beweis: Sei $a \in A$ mit $\frac{a}{1} \in (PA_P)^n$. $\Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{x}{s}$ für ein $x \in P^n$ und $s \in A \setminus P$

$\Rightarrow \exists t \in A\setminus P$ mit $\underbrace{ats}_{\in A\setminus P} = \underbrace{xt}_{\in P^n} \Rightarrow a \in P^{(n)}$.

Zweite Aussage folgt sofort aus der Idealkorrespondenz, Lemma 4.2.11. □

Lemma[3]: Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal P. Für ein Ideal $I \neq A$ ist äquivalent:

a) P ist minimal über I

b) $P^n \subseteq I$ für ein n (d.h. P nilpotent modulo I).

Insbesondere ist A/I artinsch.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b): Es gilt dann $\dim A/I = 0 \overset{\text{Satz 7.6.7}}{\Rightarrow} A/I$ artinsch $\Rightarrow P/I \supseteq P^2/I \supseteq \dots$ ist stationär $\Rightarrow P^n/I = P^{n+1}/I \Rightarrow P/I \cdot P^n/I = P^n/I$. Nun impliziert Nakayamas Lemma dass $P^n/I = 0 \Rightarrow P^n \subseteq I$.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $Q \in \operatorname{Spec} A$ mit $Q \subsetneq P$ und $Q \supseteq I$. Da $P^n \subseteq I \Rightarrow P^n \subseteq Q$ $\Rightarrow P \subseteq Q \Rightarrow P = Q$ da P maximal. Also P minimal über I. $\square$

Satz[4] (Krulls Hauptidealsatz) Sei A ein noetherscher Ring. Ist $x \in A$, so ist $\operatorname{codim}_A P \leq 1$ $\forall P \supseteq (x)$ minimal ($\overset{x \notin A^\times}{\Rightarrow} \operatorname{codim}_A (x) \leq 1$). Ist x Nicht-Nullteiler und keine Einheit, so ist $\operatorname{codim}_A P = 1$ $\forall P \supseteq (x)$ minimal ($\Rightarrow \operatorname{codim}_A (x) = 1$).

Beweis: Sei P ein minimales Primideal über (x). Wir müssen zeigen, dass $\operatorname{codim} P \leq 1$, d.h. $\dim A_P \leq 1$. Das ist äquivalent zu $\dim A_Q = 0$ für jedes $Q \in \operatorname{Spec} A$, $Q \subsetneq P$. Indem wir A durch A_P ersetzen (ist immer noch noethersch) können, wir oBdA annehmen, dass A lokal mit maximalem Ideal P ist. Nach Lemma 8.7.3 ist $A/(x)$ artinsch. Die absteigende Kette $Q^{(1)} + (x) \supseteq Q^{(2)} + (x) \supseteq \dots$ ist daher stationär. Es gibt also $n \in \mathbb{N}$ mit $Q^{(n)} + (x) = Q^{(n+1)} + (x)$.
$\Rightarrow Q^{(n)} \subseteq Q^{(n+1)} + (x)$. Ist $f \in Q^{(n)}$, so gibt es daher $a \in A$ und $g \in Q^{(n+1)} \subseteq Q^{(n)}$ mit $f = ax + g \Rightarrow ax = f - g \in Q^{(n)}$. Nach Definition von $Q^{(n)}$ gibt es nun $s \in A \setminus Q$ mit $sax \in Q^n$. Da P minimal über x und $Q \subsetneq P$, ist $x \in A \setminus Q$, also $(sx)a \in Q^n$ heißt $a \in Q^{(n)}$. Das zeigt

$$Q^{(n)} = (x) Q^{(n)} + Q^{(n+1)}$$

Da A noethersch, sind all diese Ideale endlich erzeugt. Da A lokal und $x \in P = \mathrm{Jac}(A)$, folgt mit Nakayamas Lemma $Q^{(n)} = Q^{(n+1)}$.
Es gilt $Q^{(n)} \cdot A_Q = (QA_Q)^n$ nach Definition der symbolischen Potenz, d.h.

$$(QA_Q)^n = (QA_Q)^{n+1} = QA_Q \cdot (QA_Q)^n = \mathrm{Jac}(A_Q) \cdot (QA_Q)^n$$

Nakayamas-Lemma impliziert also $(QA_Q)^n = 0$. Nach Lemma 8.7.3 ist QA_Q also minimal über $0 \Rightarrow \dim A_Q = 0$.
Haben nun $\operatorname{codim}_A P \leq 1 \; \forall P \supseteq (x)$ minimal gezeigt

$$\Rightarrow \operatorname{codim}_A (x) = \inf_{\substack{P \supseteq (x) \\ \text{minimal}}} \operatorname{codim}_A P \leq 1.$$

Sei jetzt x Nicht-Nullteiler und $P \supseteq (x)$ minimal. Angenommen $\operatorname{codim}_A P = 0$.
$\Rightarrow \dim A_P = 0 \Rightarrow A_P$ artinsch. Habe Idealkette $PA_P \supseteq (PA_P)^2 \supseteq \ldots$
Diese ist stationär, d.h. $(PA_P)^n = (PA_P)^{n+1}$ für ein n. Wie oben impliziert Nakayamas Lemma, dass PA_P nilpotent. Da $x \in P$, ist das Bild von x in A_P also nilpotent. $\Rightarrow \frac{x^m}{1} = 0 \in A_P \Rightarrow \exists s \in A \setminus P$ mit

$$0 = sx^m = (sx^{m-1})x \quad \text{in } A \qquad \Downarrow \; s \neq 0$$

Da x Nicht-Nullteiler $\Rightarrow sx^{m-1} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow sx = 0$ ↯ zu x Nicht-Nullteiler.
Ist x keine Einheit, so existiert ein minimales Primideal über (x) und wir bekommen

$$\operatorname{codim}_A (x) = \inf_{\substack{P \supseteq (x) \\ \text{minimal}}} \operatorname{codim}_A P = 1.$$

□

<u>Korollar:</u>[5] Ist K ein Körper und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ nicht konstant, so ist

$$\dim K[X_1, \ldots, X_n]/(f) = n-1.$$

<u>Beweis:</u> Nach Krulls Hauptidealsatz ist $\operatorname{codim}(f) = 1$. Mit Satz 8.6.2 gilt nun $n = \dim K[X_1, \ldots, X_n] = \dim (f) + \operatorname{codim}(f)$. □

Satz[6] (Erweiterter Krulls Hauptidealsatz). Sei A ein noetherscher Ring und $x_1, \dots, x_c \in A$. Dann ist $\operatorname{codim}_A P \leq c$ $\forall P \supseteq (x_1, \dots, x_c)$ minimal ($\Rightarrow \operatorname{codim}_A (x_1, \dots, x_c) \leq c$ falls $(x_1, \dots, x_c) \neq A$)

Beweis: Beim nächsten Mal. $\square$

Korollar[7]: Sei A ein noetherscher Ring. Dann erfüllt die Menge der Primideale die absteigende Kettenbedingung und

$$\operatorname{codim}_A P \leq \#\text{Erzeuger von } P < \infty$$

Beweis: Klar $\square$

Korollar[8]: Ist A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalen Ideal M, so ist $\dim A \leq \dim_{A/M} M/M^2 < \infty$.

Beweis: Es ist $\dim A = \operatorname{codim} M$. Nach Korollar 3.5.7 zum Nakayama-Lemma gibt das Urbild einer Vektorraum-Basis des A/M-Moduls M/M^2 ein minimales Erzeugendensystem von M. Daher $\operatorname{codim}_A M \leq \dim_A M/M^2$ nach Korollar 8.7.7. $\square$

Also: Lokale noethersche Ringe haben immer endliche Dimension!