8.7

Vorlesung 26 (01.02.17)

Satz[6] (Erweiterter Krulls Hauptidealsatz). Sei A ein noetherscher Ring und $x_1,\dots,x_c \in A$. Dann ist $\operatorname{codim}_A P \leq c$ $\forall P \supseteq (x_1,\dots,x_c)$ minimal ($\Rightarrow \operatorname{codim}_A (x_1,\dots,x_c) \leq c$)
└ falls $(x_1,\dots,x_c) \neq A$.

Beweis: Wie in Beweis von Satz 8.7.4 können wir A durch A_P ersetzen und daher annehmen, dass A lokal mit maximalem Ideal P ist.
Zeigen die Aussage mit Induktion über $c \in \mathbb{N}$. Der Fall $c=1$ ist Satz 8.7.4.
Sei also $c > 1$. Sei $P_0 \subsetneq \dots P_n = P$ Primidealkette. Müssen zeigen, dass $n \leq c$. Da A noethersch, können wir oBdA annehmen, dass die Kette maximal ist. Da $P \supsetneq P_{n-1}$ und P minimal über $(x_1,\dots,x_c)$, kann P_{n-1} nicht alle x_i enthalten. Sei also oBdA $x_c \notin P_{n-1}$. $\Rightarrow P$ minimal über $(P_{n-1}, x_c) \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$ mit $P^r \subseteq (P_{n-1}, x_c)$ nach Lemma 8.7.3.
Da $x_i \in P$, gibt es also $a_i \in A$ und $y_i \in P_{n-1}$ mit

$$x_i^r = a_i x_c + y_i \quad \forall 1 \leq i \leq c$$

Da P minimal über $(x_1,\dots,x_c) \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}$ mit $P^s \subseteq (x_1,\dots,x_c)$ nach Lemma 8.7.3. Sei $N := c\cdot r$.
$\Rightarrow P^{s+N} \subseteq (x_1^r,\dots,x_c^r) \subseteq (y_1,\dots,y_{c-1},x_c) \Rightarrow P$ minimal über $(y_1,\dots,y_{c-1},x_c)$ nach Lemma 8.7.3.
$\Rightarrow P/(y_1,\dots,y_{c-1})$ minimal über dem Bild von x_c in $A/(y_1,\dots,y_{c-1})$

$$\Rightarrow \operatorname{codim}_{A/(y_1,\dots,y_{c-1})} P/(y_1,\dots,y_{c-1}) \leq 1 \quad \text{nach } 8.7.4$$

$$\text{Da } P_{n-1}/(y_1,\dots,y_{c-1}) \subsetneq P/(y_1,\dots,y_{c-1}) \quad \left((y_1,\dots,y_{c-1}) \subseteq P_{n-1} \subsetneq P\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{codim}_{A/(y_1,\dots,y_{c-1})} P_{n-1}/(y_1,\dots,y_{c-1}) = 0 \Rightarrow P_{n-1} \text{ minimal über } (y_1,\dots,y_{c-1})$$

$\Rightarrow \operatorname{codim}_A P_{n-1} \leq c-1$ nach Induktionsvoraussetzung.

$$\Rightarrow \quad n-1 \leq c-1 \Rightarrow n \leq c$$

□

Erinnerung[9]: Wir hatten gezeigt, wenn $x \in A$ kein Nullteiler und keine Einheit ist, so gilt $\operatorname{codim}_A(x) = 1$. Wir können das nun verallgemeinern.

Def[10]: Eine Sequenz $x_1, \dots, x_c$ von Elementen eines Rings A heißt regulär, falls
a) $(x_1, \dots, x_c) \neq A$
b) x_i ist Nicht-Nullteiler in $A/(x_1, \dots, x_{i-1})$ $\forall 1 \leq i \leq c$.

Def[11]: Ein Ideal, das von einer regulären Sequenz erzeugt wird, heißt vollständiger Schnitt.

Lemma[12]: Ist $(x_1, \dots, x_c)$ reguläre Sequenz in einem noetherschen Ring A, so ist $\operatorname{codim}_A P = c$ für jedes minimale Primideal über P ($\Rightarrow \operatorname{codim}_A (x_1, \dots, x_c) = c$).

Beweis: Mit Induktion über c. Fall $c=1$ ist Satz 8.7.4 (x_1 keine Einheit nach a) und Nicht-Nullteiler nach b)). Sei also $c > 1$.
Sei $\overline{x_c}$ das Bild von x_c in $A/(x_1, \dots, x_{c-1}) =: \overline{A}$.
Nach Annahme ist $\overline{x_c}$ kein Nullteiler. Weiterhin keine Einheit, denn sonst gäbe es $y \in A$ mit $x_c y \in 1 + (x_1, \dots, x_{c-1}) \Rightarrow 1 \in (x_1, \dots, x_c)$ ↯.
Da P minimal über $(x_1, \dots, x_c)$, ist $\overline{P} := P/(x_1, \dots, x_{c-1})$ minimal über $(x_1, \dots, x_c)/(x_1, \dots, x_{c-1}) = (\overline{x_c}) \Rightarrow \operatorname{codim}_{\overline{A}} \overline{P} = 1$ nach Satz 8.7.4.

Es existiert also $\overline{Q} \in \operatorname{Spec} \overline{A}$ mit $\overline{Q} \subsetneq \overline{P}$ und $\overline{Q}$ minimal.
Können schreiben $\overline{Q} = Q/(x_1, \dots, x_{c-1})$ für ein $Q \in \operatorname{Spec} A$. Es ist dann $Q \subsetneq P$ maximale Kette und Q minimal über $(x_1, \dots, x_{c-1})$.

Nach Induktion folgt $\operatorname{codim}_A Q = c-1$, folglich $\operatorname{codim}_A P \geq c$.
Andererseits ist $\operatorname{codim}_A P \leq c$ nach Satz 8.7.6. $\square$

<u>Korollar:</u> [13] Die Länge regulärer Sequenzen in (einem noetherschen Ring) A ist nach oben durch $\dim A$ beschränkt.

<u>Beweis:</u> Klar: $c = \operatorname{codim}_A(x_1, \dots, x_c) \leq \dim A$. $\square$

<u>Korollar:</u> [14] Ist K ein Körper und $(f_1, \dots, f_c) \subset K[X_1, \dots, X_n]$ eine reguläre Sequenz, so gilt
$$\dim K[X_1, \dots, X_n] / (f_1, \dots, f_c) = n - c.$$

<u>Beweis:</u> Folgt sofort aus $\dim(f_1, \dots, f_c) + \operatorname{codim}(f_1, \dots, f_c) = n$. $\square$

<u>Bsp:</u> [15] In $K[X_1, \dots, X_n]$ ist $X_1, X_2, \dots, X_n$ reguläre Sequenz.

<u>Bsp:</u> [16] Die Sequenz $(X, Y(1-X), Z(1-X)) \subseteq K[X, Y, Z]$ ist eine reguläre Sequenz, also
$$\dim K[X, Y, Z] / (X, Y(1-X), Z(1-X)) = 3 - 3 = 0$$

In der Tat ist die Nullstellenmenge ja nur der Ursprung.

<u>Achtung:</u> [17] Eine Permutation einer regulären Sequenz muss nicht notwendig wieder eine reguläre Sequenz sein. z.B. ist $Y(1-X), Z(1-X), X$ keine reguläre Sequenz mehr. Aber:

<u>Lemma:</u> [18] Jede Permutation einer regulären Sequenz in einem noetherschen <u>lokalen</u> Ring ist immer noch regulär.

<u>Beweis:</u> Sei $(x_1, \dots, x_c)$ reguläre Sequenz und $\pi \in S_c$ (symmetrische Gruppe) Permutation. Müssen zeigen, dass $(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(c)})$ auch regulär. Da π von Transpositionen (Vertauschen zweier Elemente) erzeugt, genügt es, dies für Transpositionen zu zeigen.

OBdA genügt es dann, das Vertauschen nur von x_1 und x_2 zu betrachten.
Es genügt zu zeigen, dass (x_2, x_1) reguläre Sequenz ist, der Rest folgt dann automatisch da $A/(x_1,x_2) = A/(x_2,x_1)$.

Müssen zeigen, dass x_2 Nicht-Nullteiler und x_1 Nicht-Nullteiler in $A/(x_2)$
Vorraussetzung ist, dass (x_1,x_2) reguläre Sequenz, d.h. x_1 Nicht-Nullteiler und x_2 Nicht-Nullteiler auf $A/(x_1)$.

1. Betrachte $V := A$ als A-Modul und setze $U := \mathrm{Ann}_A(x_2)$. Zeigen $U = 0$. Dann ist x_2 Nicht-Nullteiler. Ist $u \in U$, so gilt $ux_2 = 0$. Dann ist $x_2 \cdot \bar{u} = 0$ in $A/(x_1)$. Da x_2 Nicht-Nullteiler auf $A/(x_1)$, folgt $\bar{u} = 0$ in $A/(x_1)$
$\Rightarrow u \in (x_1) \Rightarrow u = x_1 w$ für ein w. Dann gilt aber
$0 = ux_2 = x_1 w x_2 = x_1(x_2 w)$. Da x_1 Nicht-Nullteiler, ist $x_2 w = 0$.
$\Rightarrow w \in U$.
Haben gezeigt: $u \in U \Rightarrow \exists w \in U$ mit $u = x_1 w$, d.h. $U = x_1 U$. Da x_1 keine Einheit und A lokal, ist $x_1 \in \mathrm{Jac}(A)$. Da A noethersch, ist U endlich erzeugt und Nakayamas Lemma zeigt nun $U = 0$.

2. Angenommen x_1 Nullteiler auf $A/(x_2) \Rightarrow x_1 v \in (x_2)$ für ein $v \in A$
$\Rightarrow x_1 v = x_2 u$ für ein $u \in A$. $\Rightarrow x_2 u = 0$ in $A/(x_1)$
Da x_2 Nicht-Nullteiler auf $A/(x_1) \Rightarrow u \in (x_1) \Rightarrow u = x_1 w$ für ein $w \in A$.
$\Rightarrow x_1 v = x_2 u = x_2 x_1 w \Rightarrow x_1(v - x_2 w) = 0$. Da x_1 Nicht-Nullteiler, folgt
$v - x_2 w = 0 \Rightarrow v \in (x_2) \Rightarrow v = 0$ in $A/(x_2)$

$\square$

<u>Frage</u>: Eine reguläre Sequenz in einem lokalen Ring ist immer eine Sequenz im maximalen Ideal (da alles Nicht-Einheiten). Wann wird das maximale Ideal von einer regulären Sequenz erzeugt?

Satz[19]: Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalen Ideal M. Es ist äquivalent:
a) A ist regulär, d.h. $\dim_{A/M} M/M^2 = \dim A$
b) M wird von einer regulären Sequenz erzeugt.
In diesem Fall ist A bereits Integritätsbereich.

Benötige für den Beweis noch ein allgemeines Hilfsmittel:

Satz[20] (Krulls Schnittsatz) Sei A ein noetherscher Ring und $I \trianglelefteq A$. Ist $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n$, so ist $x \in xI$.

Beweis: Es ist $I = (a_1, .., a_r)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein homogenes Polynom $P_n \in A[X_1, .., X_r]$ vom Grad n (d.h. alle Monome haben Grad n) mit $x = P_n(a_1, ..., a_r)$. Sei $J_n := (P_1, .., P_n) \in A[X_1, .., X_r]$. Haben dann Kette $J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq ..$ in $A[X_1, .., X_r]$. Da A noethersch, ist auch $A[X_1, .., X_r]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz). Es gibt also $N \in \mathbb{N}$ mit $J_N = J_{N+1}$, d.h. $P_{N+1} \in J_N$. Es gibt also $f_1, .. f_n \in A[X_1, .., X_r]$ mit

$$P_{N+1} = f_1 P_1 + .. + f_N P_N$$

Können jedes f_i schreiben als

$$f_i = \sum_j h_{i,j}$$

mit h_j homogen vom Grad j. Dann ist

$$P_{N+1} = \sum_{i=1}^N f_i P_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathbb{N}} h_{i,j} P_i = \sum_{d \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^N h_{i,d-\deg P_i} P_i$$

Da P_{N+1} homogen vom Grad $N+1$, muss gelten

$$P_{N+1} = \sum_{i=1}^N h_i P_i, \quad h_i := h_{i,N+1-\deg P_i} \text{ homogen}$$

vom Grad > 0 da $N+1 = \deg P_{N+1} > \deg P_i$

Erhalten nun

$$x = P_{N+1}(a_1, .., a_r) = \sum_{i=1}^N h_i(a_1, .., a_r) \cdot P_i(a_1, .., a_r)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} h_i(a_1, \dots, a_r)\, x = x \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} h_i(a_1, \dots, a_r) \right)}_{\substack{\in I \text{ da} \\ \text{dy } h_i > 0}}.$$

$\square$