8.7

Vorlesung 27 (03.02.17)

Wollen zeigen:

Satz[19]: Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalen Ideal M. Es ist äquivalent:
a) A ist regulär, d.h. $\dim_{A/M} M/M^2 = \dim A$
b) M wird von einer regulären Sequenz erzeugt.
In diesem Fall ist A bereits Integritätsbereich.

Zum Beweis noch einige Zutaten. Letztes Mal haben wir bewiesen:

Satz[20] **(Krulls Schnittsatz)** Sei A ein noetherscher Ring und $I \trianglelefteq A$. Ist $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n$, so ist $x \in xI$. (letztes Mal gezeigt)

Korollar[21]: Sei A ein noetherscher Ring und $I \subsetneq A$. Ist A ein Bereich oder ist $I \subseteq \operatorname{Jac} A$, so ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = 0$.

Beweis: Sei $x \in \bigcap_n I^n$. Nach Krulls Schnittsatz ist dann $x \in xI$, d.h. $x = xa$ mit $a \in I$. $\Rightarrow (a-1)x = 0$. Ist A Bereich, so gilt $a = 1$ ↯ zu $I \neq A$ oder $x = 0$. Ist $I \subseteq \operatorname{Jac} A$, so ist $a - 1 \in A^\times \Rightarrow x = 0$. □

Korollar[22]: Ist A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalen Ideal M, so ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^n = 0.$$

Beweis Folgt sofort □

Lemma[23] **("Prim-Vermeidung")** Seien $I_1, \dots, I_n$ Ideale in einem Ring A und sei J ein Ideal, das in keinem der I_i enthalten ist. Sind mindestens $n-2$ der I_i prim, so ist auch $J \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$.

Beweis: Können oBdA annehmen, dass I_i prim $\forall i > 2$.
Mit Induktion über n. Fall $n=1$ ist klar. Sei $n>1$. Nach Induktion ist für jedes j

$$J \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} I_i$$

Es gibt also $z_j \in J \setminus \bigcup_{i\neq j} I_i$. Ist $z_j \notin I_j$ für ein j, so sind wir fertig.

Sei also $z_j \in I_j$ $\forall j$. Setze $z = z_1\cdots z_{n-1} + z_n$. Dann ist $z \in J$ (da Ideal). Aber $z \notin I_i$ $\forall i$, denn: ist $z \in I_i$ für ein $i \leq n-1$, so ist

$$z_n = \underbrace{z}_{\in I_i} - \underbrace{z_1\cdots z_{n-1}}_{\substack{\in I_i \\ \text{da } z_i \in I_i}} \in I_i \ \lightning \text{ zur Def von } z_n.$$

Ist $z \in I_n \Rightarrow z_1\cdots z_{n-1} = z - z_n \in I_n$. Ist $n=2$, so ist $z = z_1 + z_2 \in I_2$ und damit $z_1 \in I_2$ $\lightning$ zur Wahl von z_1. Sei also $n>2$. Da I_n prim und $z_1\cdots z_{n-1} \in I_n$, ist $z_i \in I_n$ für ein $1 \leq i \leq n-1$ $\lightning$. □

Lemma 24 ("Umkehrung" von Krulls Idealsatz): Sei A noethersch Ring und $P \in \operatorname{Spec} A$. Ist $\operatorname{codim}_A P = c$, so ist P minimal über einem von c Elementen erzeugten Ideal.

Beweis: Konstruieren induktiv Elemente $x_1,..,x_r$ in P mit $\operatorname{codim}_A(x_1,..,x_r) = r$. Es ist dann $\operatorname{codim}_A(x_1,..,x_c) = c = \operatorname{codim}_A P$, also muss P minimal über $(x_1,..,x_c)$ sein, da $(x_1,..,x_c) \subseteq P$.
Angenommen, $x_1,..,x_{r-1}$ sind konstruiert. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der minimalen Primideale über $(x_1,..,x_{r-1})$. Da A noethersch, ist $\mathcal{M}$ endlich nach Aufgabe 10.3. Da $\operatorname{codim}_A(x_1,..,x_{r-1})$, ist $\operatorname{codim}_A Q \geq r-1$ $\forall Q \in \mathcal{M}$. Nach Krulls Idealsatz 8.7.6 ist andererseits aber auch $\operatorname{codim}_A Q \leq r-1$. Also $\operatorname{codim}_A Q = r-1$ $\forall Q \in \mathcal{M}$. Da $\operatorname{codim}_A P = c > r-1$, muss dann $P \not\subseteq Q$ für alle $Q \in \mathcal{M}$ gelten. Wegen Primvermeidung 8.7.23 ist also

$P \notin \bigcup_{Q \in \mathcal{M}} Q$. Sei $x_r \in P \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{M}} Q$. Ist $Q' \in \operatorname{Spec} A$ mit $(x_1, \dots, x_r)$, so ist

auch $(x_1, \dots, x_{r-1}) \subseteq Q'$, es gibt daher $Q \in \mathcal{M}$ mit $Q \subseteq Q'$. Da $x_r \notin Q$, ist $Q \subsetneq Q'$. $\Rightarrow \operatorname{codim}_A Q' > \operatorname{codim}_A Q = r-1$.

$\Rightarrow \operatorname{codim}_A (x_1, \dots, x_r) \geq r$. Andererseits liefert Krulls Idealsatz 8.7.6

$\operatorname{codim}_A (x_1, \dots, x_r) \leq r$. Also $\operatorname{codim}_A (x_1, \dots, x_r) = r$.

$\square$

25

Lemma: Ist A noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal M und ist $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ so ist äquivalent:

a) $\dim A/(x_1, \dots, x_n) = 0$

b) M ist minimal über $(x_1, \dots, x_n)$

c) $M^N \subseteq (x_1, \dots, x_n)$ für $N \gg 0$.

d) $\sqrt{(x_1, \dots, x_n)} = M$.

Es gilt dann $\dim A \leq n$. Weiterhin existiert eine Familie, deren Größe gleich $\dim A$ ist. Solche Familien heißen **Parametersystem** für A

Beweis: Äquivalenzen folgen aus Lemma 8.7.3. Ist M minimal über $(x_1, \dots, x_n)$, so ist nach Krulls Idealsatz 8.7.6

$$\dim A = \operatorname{codim}_A M \leq n.$$

Andererseits existieren nach Lemma 8.7.24 Elemente $x_1, \dots, x_n \in M$, sodass $n = \operatorname{codim}_A M = \dim A$ und M minimal über $(x_1, \dots, x_n)$

$\square$

Für lokale Ringe kann man nun aus Krulls Hauptidealsatz eine Aussage über Dimensionen ableiten:

26

<u>Lemma</u> Ist A ein lokaler noetherscher Ring und $x \in A$ keine Einheit (also $x \in M$), so gilt
$$\dim A/(x) \geq \dim A - 1$$

Ist x Nicht-Nullteiler und keine Einheit, so gilt
$$\dim A/(x) = \dim A - 1.$$

<u>Beweis:</u> $\bar{A} := A/(x)$ ist lokal mit max Ideal $\bar{M} := M/(x)$.
Seien $x_1, .., x_n \in A$, sodass deren Bilder $\bar{x}_1, .., \bar{x}_n$ Parametersystem für $\bar{A}$ geben, d.h.
$$\dim \bar{A}/(\bar{x}_1, .., \bar{x}_n) = 0$$

Es ist $\bar{A}/(\bar{x}_1, .., \bar{x}_n) = A/(x, x_1, .., x_n)$, d.h. $\dim A/(x, x_1, .., x_n) = 0$

und daher $\dim A \leq n+1 = \dim A/(x) + 1$. Ist x keine Einheit und Nicht-Nullteiler, so ist $\operatorname{codim}_A (x) = 1$ nach Krulls Hauptidealsatz 8.7.4. Folglich muss
$$\dim A/(x) = \dim(x) \leq \dim A - 1$$
und damit gelten und damit
$$\dim A/(x) = \dim A - 1.$$

□

Jetzt aber zum Beweis von Satz 8.7.19

19

<u>Satz:</u> Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalen Ideal M. Es ist äquivalent:
a) A ist regulär, d.h. $\dim_{A/M} M/M^2 = \dim A$
b) M wird von einer regulären Sequenz erzeugt.
In diesem Fall ist A bereits Integritätsbereich und jedes Urbild einer Basis von M/M^2 gibt eine reguläre Sequenz.

b) $\Rightarrow$ a) Sei $\mathcal{M} = (x_1, .., x_c)$, reguläre Sequenz. Nach Lemma 8.7.12 ist $\dim A = \operatorname{codim}_A \mathcal{M} = c$. Nach Nakayama-Lemma 3.5.7 ist $\dim_{A/\mathcal{M}} \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \leq c = \dim A$. Nach Satz 8.7.8 ist $\dim A \leq \dim_{A/\mathcal{M}} \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$

$\Rightarrow \dim A = \dim_{A/\mathcal{M}} \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$.

a) $\Rightarrow$ b) Beweisen zunächst mit Induktion über $\dim A$, dass A ein Integritätsbereich ist.
Fall $\dim A = 0$: A ist lokal mit maximalen Ideal $0 \Rightarrow A$ ist Körper
Sei also $\dim A = n > 0$. Es gilt $\mathcal{M}^2 \neq \mathcal{M}$ wegen Nakayama-Lemma.
Da A noethersch ist nach Aufgabe 10.3 die Menge $\mathcal{U}$ der minimalen Primideale von A endlich. Da $\dim A > 0$, ist $\mathcal{M} \notin \mathcal{U}$, also $\mathcal{M} \not\subseteq Q$ $\forall Q \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{M}^2$. Wegen Primvermeidung 8.7.23 ist daher

$$\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{M}^2 \cup \bigcup_{Q \in \mathcal{U}} Q$$

Sei $x \in \mathcal{M} \setminus \left(\mathcal{M}^2 \cup \bigcup_{Q \in \mathcal{U}} Q\right)$. $\bar{A} := A/(x)$ ist lokal mit maximalen Ideal $\bar{\mathcal{M}} := \mathcal{M}/(x)$.

Da $x \notin Q$ $\forall Q \in \mathcal{U}$, ist $\dim \bar{A} < \dim A$. Also muss $\dim \bar{A} = \dim A - 1 = n-1$ gelten nach Lemma 8.7.26.

Sei $K := A/\mathcal{M}$ und $V := \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$. Nach Voraussetzung ist $\dim_K V = \dim A = n$.
Sei $\bar{x}$ das Bild von x in V. Da $x \notin \mathcal{M}^2$, ist $\bar{x} \neq 0$. Also ist

$$\dim_K V/(\bar{x}) = \dim V - 1 = \dim \bar{A}.$$

Es gilt $\bar{A}/\bar{\mathcal{M}} = \dfrac{A/(x)}{\mathcal{M}/(x)} \simeq K$

und $\bar{\mathcal{M}}/\bar{\mathcal{M}}^2 = \dfrac{\mathcal{M}/(x)}{\mathcal{M}^2/(x)} = V/(x)$

$$\Rightarrow \dim_{\bar{A}/\bar{\mathcal{M}}} \bar{\mathcal{M}}/\bar{\mathcal{M}}^2 = \dim_K V/(x) = \dim \bar{A}$$

$\Rightarrow \bar{A}$ ist regulär. Da $\dim \bar{A} < \dim A$, ist $\bar{A}$ also Integritätsbereich nach Induktionsvoraussetzung. Dann ist (x) also Primideal von A. Da $x \notin Q$ $\forall Q \in \mathcal{M}$ nach Wahl, ist (x) kein minimales Primideal $\rightarrow \exists Q \in \mathcal{M}$ mit $Q \subsetneq (x)$. Ist also $y \in Q$, so ist $y = ax$ für ein $a \in A$. Da $x \notin Q$ und Q prim, folgt $a \in Q$. Also $y \in xQ$. Das zeigt $Q = xQ$. Da $x \in M = \mathrm{Jac}(A)$, folgt mit dem Nakayama-Lemma $Q = 0$. Das Nullideal ist also Primideal $\Rightarrow A$ ist Integritätsbereich.

Sei nun $x_1, \dots, x_n$ Urbild einer K-Basis von M/M^2. Es ist $n = \dim A$, da A regulär. Nach Nakayama-Lemma ist $x_1, \dots, x_n$ minimales Erzeugendensystem von M. Sei $A_i := A/(x_1, \dots, x_{i-1})$. Ist lokal mit max Ideal

$$M_i := M/(x_1, \dots, x_{i-1}) = (x_1, \dots, x_n)/(x_1, \dots, x_{i-1})$$

M_i erzeugt durch $x_i, \dots, x_n$ und die Bilder sind Basis von M_i/M_i^2

$\rightsquigarrow x_i, \dots, x_n$ minimales Erzeugendensystem von M_i.

$\rightsquigarrow \dim A_i \leq n - i + 1 = \dim M_i/M_i^2$

Andererseits ist

$$\dim A_i \geq \dim A - i + 1 = n - i + 1$$

nach Lemma 8.7.26. Also

$$\dim A_i = \dim M/M_i^2$$

$\Rightarrow A_i$ regulär $\Rightarrow A_i$ Integritätsbereich. Folglich ist $(x_1, \dots, x_n)$ reguläre Sequenz. $\square$