Vorlesung 28 (08.02.17)

9. Dedekind-Ringe

Aus der Übung:

Satz: Für einen Integritätsbereich A ist äquivalent:
a) A ist noethersch und A_M ist diskreter Bewertungsring $\forall M \in \operatorname{Max} A$
b) A ist noethersch, eindimensional und normal.
c) A ist noethersch, eindimensional und regulär, d.h. A_M regulär $\forall M \in \operatorname{Max} A$ □
In diesem Fall heißt A Dedekind-Ring.

$\leadsto$ "Dedekind-Ringe = glatte Kurven"

Bsp: Jeder Hauptidealbereich ist Dedekind-Ring, z.B. $\mathbb{Z}$, $K[X]$.

Satz: Die Normalisierung $\mathcal{O}_L$ von $\mathbb{Z}$ in einem Zahlkörper L ist ein Dedekind-Ring.

Beweis: $\mathcal{O}_L$ ist nach Konstruktion normal. Weiterhin ist $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_L$ ganz, daher $\dim \mathcal{O}_L = \dim \mathbb{Z} = 1$. Bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{O}_L$ noethersch ist. Zeigen das in 3 Schritten. Sei $A := \mathcal{O}_L$.
1. $|A/pA| < \infty$ $\forall p \in \mathbb{Z}$ prim.
Beweis: A/pA ist Vektorraum über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$. Es genügt daher $\dim_{\mathbb{F}_p} A/pA < \infty$ zu zeigen. Seien $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in A/pA$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_p$. Wir zeigen, dass Urbilder $a_1, \dots, a_n \in A \subseteq L$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Angenommen, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$ für gewisse $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, nicht alle gleich 0. Durch Multiplizieren der Nenner mit dem kgV der Nenner können wir oBdA $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$ annehmen. Weiterhin können wir oBdA annehmen, dass nicht alle λ_i durch p teilbar. Dann ist $\bar{\lambda}_1 \bar{a}_1 + \dots + \bar{\lambda}_n \bar{a}_n = 0$

nicht-triviale Relation ↯. Also gilt $\dim_{\mathbb{F}_p} A/pA \leq \dim_{\mathbb{Q}} L < \infty$
$\Rightarrow |A/pA| < \infty$.

2. $|A/mA| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$
Beweis: Für m Primzahl bewiesen. Sei $m = m_1 \cdot m_2$. Dann haben wir exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \to A/m_1A \xrightarrow{\cdot m_2} A/m_1m_2A \longrightarrow A/m_2A \to 0$$

$\Rightarrow |A/m_1m_2A| = |A/m_1A| \cdot |A/m_2A|$. Aussage folgt nun mit Induktion über die Anzahl der Primfaktoren von m.

3. Sei $I \trianglelefteq A$ ein Ideal, $I \neq 0$. Wir zeigen, dass $m \in I$ für ein $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
Angenommen, $\mathbb{Z} \cap I = \{0\}$. Da $\mathbb{Z} \subseteq A$ ganz, ist auch $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/I\cap\mathbb{Z} \subseteq A/I$ ganz und daher

$$\dim A/I = \dim \mathbb{Z} = 1.$$

Da $I \neq 0$ und $0 \in \operatorname{Spec} A$, kann man aber jede Primidealkette über I aber noch mit 0 erweitern, d.h.

$$1 = \dim A/I < \dim A = 1 \text{ ↯}$$

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq m \in I \cap \mathbb{Z}$. $\Rightarrow (m) \subseteq I \Rightarrow$

$$|I/(m)| \leq |A/(m)| < \infty \text{ nach 2}$$

$\Rightarrow I/(m) = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ für gewisse $a_i \in I$

$\Rightarrow I = (m, a_1, \dots, a_n)$.

Also jedes Ideal endlich erzeugt $\Rightarrow A$ noethersch. $\square$

<u>Bemerkung:</u> Man kann sogar zeigen: $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_L$ ist endlich; $\Rightarrow \mathcal{O}_L$ ist freies $\mathbb{Z}$-Modul!

<u>Bsp:</u> $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$ ist Dedekind-Ring. Ist aber nicht faktoriell (Lösung 9.6 d), denn:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

sind zwei verschiedene Faktorisierungen in irreduzible Elemente.

Es gilt aber folgende Verallgemeinerung:

<u>Satz:</u> Für einen Integritätsbereich A ungleich Körper ist äquivalent:

a) A ist Dedekind-Ring

b) Jedes Ideal $0 \neq I$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primidealen schreiben:

$$I = P_1^{\nu_1} \cdots P_n^{\nu_n} \quad \text{mit eindeutigen } P_i \in \operatorname{Spec} A \text{ und } \nu_i \geq 1.$$

In diesem Fall sind die Primideale in der Faktorisierung gerade die über I liegenden Primideale.

<u>Beweis:</u>

a) $\Rightarrow$ b): Es ist $0 \in \operatorname{Spec} A$, $0 \neq I$ und $\dim A = 1 \Rightarrow \dim A/I = 0$. Da A noethersch, ist A/I noethersch, daher hat A/I nur endlich viele minimale Primideale $\Rightarrow \operatorname{Spec} A/I$ ist endlich. Seien $P_1/I, \dots, P_n/I$ diese Primideale, $P_i \in \operatorname{Spec} A$. Wegen $I \neq 0$ und $\dim A = 1$, ist $P_i \in \operatorname{Max} A$. Da A Dedekind-Ring, ist A_{P_i} diskreter Bewertungsring. Jedes Ideal $\neq 0$ ist also Potenz des maximalen Ideals $P_i A_{P_i}$ nach Aufgabe 13.3.

Da $I \neq 0$ ist $IA_{P_i} \neq 0$, also

$$IA_{P_i} = (P_i A_{P_i})^{\nu_i} = P_i^{\nu_i} A_{P_i}$$

für ein $\nu_i \in \mathbb{N}$. Da $I \subseteq P_i$, ist $IA_{P_i} \neq A_{P_i} \Rightarrow \nu_i \geq 1$.
Da A/I artinsch, haben wir nach Aufgabe 11.1d (Korollar zu Satz 7.5.10) einen kanonischen Ringisomorphismus

$$A/I \simeq \prod_{\substack{P \in \operatorname{Spec} A \\ P \supseteq I}} (A/I)_{P/I} = \prod_{i=1}^{n} (A/I)_{P_i/I}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} A_{P_i} / IA_{P_i} = \prod_{i=1}^{n} A_{P_i} / P_i^{\nu_i} A_{P_i} \simeq \prod_{i=1}^{n} A / P_i^{\nu_i}$$

ist bereits lokal mit max Ideal P_i

$$\simeq A / \bigcap_{i=1}^{n} P_i^{\nu_i}$$ mit Chinesischem Restsatz, Aufgabe 2.2.

$$\Rightarrow I = \bigcap_{i=1}^{n} P_i^{\nu_i} = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\nu_i}$$

Aufgabe 2.2

Das zeigt Existenz der Faktorisierung. Eindeutigkeit: Ist $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$, so gilt

$$I_P = IA_P = P^{\nu_P} A_P$$

für ein eindeutiges $\nu_P \in \mathbb{N}$, da A_P diskreter Bewertungsring. Das zeigt Eindeutigkeit.

b) $\Rightarrow$ a) Sind $I, J \neq 0$ Ideale, so gilt $I \supsetneq J$ genau dann, wenn alle Primideale in der Faktorisierung von J auch in I mit höchstens gleicher Potenz auftreten und mindestens eine echt kleiner ist $\Rightarrow A$ noethersch.
Ist $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$, so hat A_P ebenfalls eindeutige Idealfaktorisierung

(Ideale in A_P sind ja einfach Ideale in A, die in P enthalten sind)

$\to$ Ist $0 \neq x \in A_P \Rightarrow (x) = P^{\nu(x)} A_P$. $\rightsquigarrow \nu : A^\times \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \nu(x)$ fortgesetzt auf $Q(A_P)$ ist diskrete Bewertung mit Bewertungsring A_P

$\Rightarrow$ A ist Dedekind-Ring. $\square$

<u>Bsp:</u> Hatten gesehen, dass der Dedekind-Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist da

$$6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

Auf Idealebene gilt aber:

(2) ist <u>kein</u> Primideal mehr in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, denn

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(2) \simeq \mathbb{Z}[X]/(2, X^2+5) \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2+5) = \mathbb{F}_2[X]/(X^2+1)$$

und das ist kein Integritätsbereich, denn in $\mathbb{F}_2[X]$ ist $X^2+1 = (X+1)^2$

In $\mathbb{Z}[-\sqrt{5}]$ haben wir daher die Faktorisierung

$$(2) = (2, 1+\sqrt{-5})^2$$

Analog:

$$(3) = (3, 1+\sqrt{-5})(3, 5+\sqrt{-5})$$

$$(1+\sqrt{-5}) = (2, 1+\sqrt{-5})(3, 1+\sqrt{-5})$$

$$(1-\sqrt{5}) = (2, 1+\sqrt{-5})(3, 5+\sqrt{-5})$$

und damit

$$(6) = (2)\cdot(3) = (2, 1+\sqrt{-5})^2 \cdot (3, 1+\sqrt{-5})(3, 5+\sqrt{-5})$$

$$= (2, 1+\sqrt{-5})(3, 1+\sqrt{-5}) \cdot (2, 1+\sqrt{-5})(3, 5+\sqrt{-5})$$

$$= (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{5})$$

10. Primärzerlegung

Hatten gesehen: Eindeutige Faktorisierung von Idealen in Primideale existiert nur für Dedekind-Ringe, d.h. noethersche, normale, eindimensionale Ringe.

Frage: Was kann man im Allgemeinen noch machen?

Antwort: Primärzerlegung!

Ist A ein Dedekind-Ring und $I \neq 0$ ein Ideal, so können wir eindeutig $I = P_1^{\nu_1} \cdots P_n^{\nu_n}$, $P_i \in \operatorname{Spec} A$ schreiben. Es ist dann ebenfalls

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} P_i^{\nu_i},$$

d.h. wir haben I als Schnitt über Primidealpotenzen beschrieben. Anstatt nur Potenzen von $P \in \operatorname{Spec} A$ zu betrachten, verallgemeinert man auf sogenannte P-primäre Ideale und erhält:

Satz: In einem noetherschen Ring A hat jedes Ideal I eine Primärzerlegung, d.h. eine Darstellung

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

mit Q_i ein primäres Ideal in A.

Der Schnitt lässt sich hierbei nicht notwendig durch das Produkt ersetzen, da die Q_i nicht notwendig paarweise koprim sind. Weiterhin ist so eine Darstellung nicht notwendig eindeutig.

Jetzt mehr Details.

10.1 Primärideale

Def: Ein Ideal Q in einem Ring A heißt primär, falls $A/Q \neq 0$ und jeder Nullteiler in A/Q bereits nilpotent ist.

Lemma: $Q \trianglelefteq A$ ist primär genau dann, wenn $Q \neq A$ und

$$xy \in Q \Rightarrow x \in Q \text{ oder } y^n \in Q \text{ für ein } n > 0.$$

Beweis: $Q \neq A \Leftrightarrow A/Q \neq 0$. Sei Q primär und $xy \in Q$, d.h. $\bar{x}\bar{y} = 0 \in A/Q$. Ist $x \notin Q \Rightarrow \bar{x} \neq 0 \Rightarrow \bar{y}$ ist Nullteiler $\Rightarrow \bar{y}$ ist nilpotent $\Rightarrow y^n \in Q$ für ein n. Umkehrung analog. □

Lemma: Ist Q primär, so ist $\sqrt{Q}$ ein Primideal (und damit das eindeutige minimale Primideal über Q). Es heißt das zu P assoziierte Primideal von Q.

Beweis: Sei $xy \in \sqrt{Q}$. Dann ist $(xy)^m = x^m y^m \in Q$ für ein m. Nach Definition ist also $x^m \in Q$ oder $y^{mn} \in Q$ für ein $n > 0$. Also $x \in \sqrt{Q}$ oder $y \in \sqrt{Q}$. □

Def: Ist $P \in \operatorname{Spec} A$, so nennt man die primären Ideale Q mit assoziiertem Primideal P die P-primären Ideale von A.

Lemma: Ist $P \in \operatorname{Spec} A$, so ist P ein P-primäres Ideal $\forall n \geq 1$.

Beweis: Klar.