10.1

Vorlesung 29 (10.02.17)

Lemma[6]: Ist $Q \trianglelefteq A$ ein Ideal mit $\sqrt{Q}$ maximal, so ist Q primär. Insbesondere sind Potenzen M^n, $n>0$, eines maximalen Ideals M M-primär.

Beweis: Sei $\sqrt{Q} = M \in \operatorname{Max} A$. Dann ist $A/Q \neq 0$. Da $\sqrt{Q} = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} A \\ P \supseteq Q}} P$, hat A/Q nur genau ein Primideal, nämlich M/Q. Insbesondere ist A/Q lokal mit maximalem Ideal M/Q. Ist $\bar{x}$ Nullteiler in A/Q, so muss $\bar{x} \in M/Q$ gelten, da alle Elemente außerhalb M/Q Einheiten sind. Da $M = \sqrt{Q}$, ist M/Q das Nilradikal von A/Q, d.h. alle Elemente in M/Q sind nilpotent. Folglich ist Q primär. □

Korollar[7]: Ist A ein Dedekind-Ring und $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$. Dann sind die P-primären Ideale in A gerade die Potenzen P^n, $n>0$.

Beweis: Da $\dim A = 1$, ist $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$ bereits maximal. Aus dem Lemma oben folgt, dass P^n, $n>0$, primär ist. Sei andererseits Q ein P-primäres Ideal. Wegen $\sqrt{Q} = P$, kann nur P über Q liegen. In der Faktorisierung von Q in Primideale kann also nur P auftauchen, d.h. $Q = P^n$ für ein $n>0$. □

Achtung[8]: Im Allgemeinen gilt aber Primärideale $\neq$ Primidealpotenzen

a) Sei $A = K[X,Y]$ und $Q = (X, Y^2)$. Es ist $A/Q = K[Y]/(Y^2)$. Die Nullteiler hierin sind Vielfache von Y, also nilpotent $\Rightarrow$ Q ist primär.
Es ist $\sqrt{Q} = (X,Y)$ $\Rightarrow$ Q ist (X,Y) primär. Es gilt aber

$$(X,Y)^2 = (X^2, XY, Y^2) \subsetneq Q \subsetneq (X,Y)$$

$\Rightarrow$ Q keine Primidealpotenz.

b) Sei $A = K[X,Y,Z]/(XY-Z^2)$. Dann ist $(X,Z) \supseteq (XY-Z^2)$ ist prim

$\Rightarrow \mathfrak{P} = (\bar{X}, \bar{Z}) \in \operatorname{Spec} A$. Es gilt $\bar{X}\bar{Y} = \bar{Z}^2 \in \mathfrak{P}^2$ aber $\bar{X} \notin \mathfrak{P}^2$ und $\bar{Y} \notin \sqrt{\mathfrak{P}^2} = \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{P}^2$ ist nicht primär.

10.2 Eindeutigkeit von Primärzerlegungen

Def.[1] Sei A ein Ring. Eine Primärzerlegung eines Ideals $I \trianglelefteq A$ ist eine Darstellung

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

mit Primäridealen Q_i. Man nennt I zerlegbar, falls I eine Primärzerlegung besitzt. Eine Primärzerlegung wie oben heißt minimal, falls gilt:

a) Die Radikale $\sqrt{Q_i}$ sind alle verschieden,

b) Kein Q_i kann entfernt werden, d.h. $Q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j \quad \forall 1 \leq i \leq n$

Lemma[2]: Eine Primärzerlegung kann immer zu einer minimalen Primärzerlegung verändert werden.

Beweis: Sei $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ Primärzerlegung. Sei $\mathcal{P} = \{\sqrt{Q_i}\ ,\ i = 1, \dots, n\}$.
Für $P \in \mathcal{P}$ sei

$$Q_P := \bigcap_{i \in I(P)} Q_i \quad , \quad I(P) := \{ i = 1, \dots, n \mid \sqrt{Q_i} = P \}.$$

Beh: Q_P ist P-primär.
Bew: Es gilt $\sqrt{Q_P} = \bigcap_{i \in I(P)} \sqrt{Q_i} = \bigcap P = P$. Sei $xy \in Q_P$ und $x \notin Q_P$.
Es gilt $xy \in Q_i \ \forall i \in I(P)$ und es muss ein $i \in I(P)$ geben mit $x \notin Q_i$. Da Q_i primär, muss gelten $y \in \sqrt{Q_i} = P = \sqrt{Q_P}$.

Nun ist $I = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} Q_P$ Primärzerlegung, in der alle Komponenten verschiedenes Radikal haben. Jetzt entfernt man einfach alle überflüssigen Komponenten. $\square$

Sei $I \trianglelefteq A$ und betrachte A/I als A-Modul. Für $x \in A$ sei $\bar{x} \in A/I$ das Bild. Dann ist

$$\mathrm{Ann}_A(\bar{x}) = \{a \in A \mid a\bar{x} = 0\} = \{a \in A \mid ax \in I\} =: (I : x)$$

<u>Def</u>[3]: Ein zu $I \trianglelefteq A$ assoziiertes Primideal ist ein Primideal $P \in \operatorname{Spec} A$ von der Form $P = \sqrt{(I:x)}$ für ein $x \in A$. Es sei $\mathrm{Ass}(I)$ die Menge dieser Primideale.

<u>Lemma</u>[4]: Sei Q ein P-primäres Ideal. Für $x \in A$ gilt:

a) Ist $x \in Q$, so ist $(Q:x) = A$

b) Ist $x \notin Q$, so ist $(Q:x)$ P-primär $\Big\} \Rightarrow \sqrt{(Q:x)} = P$

c) Ist $x \notin P$, so ist $(Q:x) = Q$

Insbesondere ist $\mathrm{Ass}(Q) = \{P\}$.

<u>Beweis</u>:

a) Klar

b) Sei $y \in (Q:x)$. Dann ist $yx \in Q$. Da $x \notin Q$, gilt $y \in \sqrt{Q} = P$. Also $Q \subseteq (Q:x) \subseteq P$. Folglich ist $P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q:x)} \subseteq \sqrt{P} = \sqrt{(Q:x)} = P$.
Sei $yz \in (Q:x)$. Angenommen, $y \notin \sqrt{(Q:x)} = P$. Es ist $xyz \in Q$. Da Q P-primär, folgt $xz \in Q \Rightarrow z \in (Q:x) \Rightarrow (Q:x)$ P-primär

c) Sei $y \in (Q:x) \Rightarrow xy \in Q$. Da $x \notin P = \sqrt{Q}$, gilt $y \in Q$ da Q primär. $\square$

<u>Satz</u>[5]: Sei $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ eine minimale Primärzerlegung. Dann ist

$$\mathrm{Ass}(I) = \{\sqrt{Q_i} \mid i = 1, \dots, n\}$$

Die Radikale der Primärideale in einer minimalen Primärzerlegung sind also unabhängig von der Zerlegung.

<u>Beweis:</u> Für jedes $x \in A$ gilt $(I:x) = \left(\bigcap_i Q_i : x\right) = \bigcap_i (Q_i : x)$ und daher

$$\sqrt{(I:x)} = \bigcap_i \sqrt{(Q_i:x)} \underset{\text{Lemma 10.2.4}}{=} \bigcap_{\substack{i \\ x \notin Q_i}} P_i$$

Angenommen, $\sqrt{(I:x)} =: P$ ist Primideal (und damit assoziiert).
Beh: $P = P_i$ für ein i.
Bew: Angenommen $P \not\supseteq P_i \; \forall i \Rightarrow$ Für jedes i gibt es dann $x_i \in P_i$ mit $x_i \notin P$. Folglich ist $\prod x_i \in \prod P_i \subseteq \bigcap P_i$. Aber $\prod x_i \notin P$ da P prim. Also $P \not\supseteq \bigcap P_i$ ↯ Haben also $P \supseteq P_i$ für ein i. Andererseits gilt $P = \bigcap P_i \subseteq P_i$.
Also $P = P_i$.
Folglich ist $\operatorname{Ass}(I) \subseteq \{P_1, \dots, P_n\}$. Andererseits gibt es für jedes i ein $x_i \notin Q_i$ mit $x_i \in \bigcap_{j \neq i} Q_j$ da die Zerlegung minimal ist. Es gilt dann nach oben

$$\sqrt{(I:x)} = \bigcap_{\substack{j \\ x_i \notin Q_j}} P_j = P_j$$

Das zeigt $\operatorname{Ass}(I) \supseteq \{P_1, \dots, P_n\}$. $\square$

<u>Satz</u> 6: Sei I zerlegbar. Dann sind die minimalen Elemente in $\operatorname{Ass}(I)$ genau die minimalen Primideale über I.

<u>Beweis:</u> Sei $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ minimale Primärzerlegung. Sei $P \supseteq I$ ein Primideal. Dann gilt

$$P = \sqrt{P} \supseteq \sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \bigcap_{i=1}^n P_i$$

Mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Satz 10.2.5 folgt $P \supseteq P_i$ für ein i. Ist also P minimal, so ist $P = P_i$ und dies ist minimal in $\operatorname{Ass}(I)$.
Sei andererseits $P_i \in \operatorname{Ass}(I)$ minimal in $\operatorname{Ass}(I)$. Angenommen, es gibt Primideal P mit $I \subseteq P \subseteq P_i$. Nach oben liegt P über einem Element P' von $\operatorname{Ass}(I)$. Dann gilt aber $P' \subseteq P \subseteq P_i \Rightarrow P' = P_i$. Also ist P_i minimaler

29.5

Primideal. $\square$

<u>Def:</u> Die minimalen Primideale in $\operatorname{Ass}(I)$ nennt man auch isoliert. Alle anderen nennt man eingebettet. Die Komponenten einer minimalen Primärzerlegung deren assoziiertes Primideal minimal ist, nennt man minimale (oder isolierte) Primärkomponenten, alle anderen eingebettete Primärkomponenten.

Hier ohne Beweis (ist aber elementar):

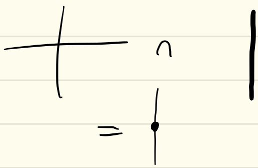
<u>Satz:</u> Die minimalen Primärkomponenten in einer minimalen Primärzerlegung sind unabhängig von der Zerlegung.

<u>Bsp:</u> Sei $A = K[X,Y]$ und $I = (X^2, XY)$. Sei $P_1 := (X)$ und $P_2 := (X,Y)$. P_1 ist prim, daher P_1-primär. P_2 ist maximal, daher ist P_2^2 P_2-primär nach Lemma 10.1.6. Es ist

$$(X^2, XY) = (X) \cap (X^2, XY, Y^2). \quad \text{Also } I = P_1 \cap P_2^2$$

ist minimale Primärzerlegung. Daher ist

$$\operatorname{Ass} I = \{P_1, P_2\}$$



P_1 ist minimal, P_2 ist eingebettet.

Wir haben aber auch $I = (X^2, XY) = (X) \cap (X^2, Y)$. Ist ebenfalls minimale Primärzerlegung $\rightsquigarrow$ nur minimale Komponenten sind eindeutig.

<u>10.3 Existenz von Primärzerlegungen</u>

<u>Satz:</u> In einem noetherschen Ring hat jedes Ideal eine Primärzerlegung.