Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 19.10.2016

Übungsblatt 1

Besprechung am 21.10.2016

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Ich formuliere die Aufgaben meistens als Aussagen und leite nicht immer mit "Zeige..." ein. Es sollte eigentlich immer klar sein, was zu zeigen ist.

Aufgabe 1. Registriere dich im Forum zur Vorlesung unter

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/~thiel/teaching/komalg-ws16/stack/

mit dem Codewort aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (Ringmorphismen)**.**
a) Ist die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$, ein Ringmorphismus?
b) Ist die Abbildung $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$, $x \mapsto x^5$, ein Ringmorphismus?
c) Für jeden Ring A gibt es genau einen Ringmorphismus $\mathbb{Z} \to A$ und genau einen Ringmorphismus $A \to 0$ gibt, wobei 0 der Nullring ist. Man sagt auch, dass $\mathbb{Z}$ ein *Initialobjekt* und 0 ein *Terminalobjekt* in der Kategorie der Ringe (mit 1) ist.
d) Bestimme alle Ringmorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
e) Bestimme alle Ringmorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f) Sei A ein Ring der Prim-Charakteristik $p > 0$.[1] Die Abbildung $A \to A$, $a \mapsto a^p$, ist ein Ringmorphismus. Dieser heißt *Frobenius-Morphismus.*
g) Zwei Unterringe von $\mathbb{Q}$ sind genau dann isomorph, wenn sie gleich sind.

Aufgabe 3 (Idempotente)**.**
Ein *Idempotent* eines Rings A ist ein Element $e \in A$ mit $e^2 = e$. Es gilt:
a) $Ae = \{ae \mid a \in A\} \subseteq A$ ist mit der Addition und Multiplikation von A ein Ring (aber *kein* Unterring sofern $e \neq 1$).
b) $1 - e$ ist ebenfalls ein Idempotent.
c) A ist als Ring isomorph zu $Ae \times A(1 - e)$. Merke: Ein Idempotent in einem Ring bedeutet, dass sich der Ring zerlegen lässt.
d) Bestimme alle Idempotente in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (Einheiten)**.**
a) Ist A ein Ring und $a, b \in A$ mit $ab \in A^\times$, so gilt $a, b \in A^\times$.
b) Sind A und B Ringe, so sind die Gruppen $(A \times B)^\times$ und $A^\times \times B^\times$ isomorph.
c) Ist $f : A \to B$ ein Ringmorphismus, so gilt $f(A^\times) \subseteq B^\times$ und f induziert einen Gruppenmorphismus $A^\times \to B^\times$.
d) Bestimme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
e) Bestimme die Einheiten im Unterring $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Maps}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen.

Aufgabe 5 (Nilpotente Elemente und Einheiten)**.** Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 0$.
a) Ist $u \in R$ eine Einheit und $x \in R$ nilpotent, so ist auch $u + x$ eine Einheit.
b) Sind $x, y \in R$ nilpotent, so ist auch $x + y$ nilpotent.

[1] Siehe Forum zur Erläuterung.

Aufgabe 6 (Einheiten im Polynomring)**.** Sei R ein Ring. Benutze Aufgabe 5, um folgende Aussage zu zeigen: Ist R ein Ring $f = r_0 + r_1X + \ldots + r_nX^n \in R[X]$ ein Polynom in einer Variablen X, so ist f genau dann invertierbar, wenn $r_0 \in R^\times$ und alle $r_1, \ldots, r_n$ nilpotent in R sind. Was ist also $\mathbb{Z}[X]^\times$?