Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 16.12.2016

Übungsblatt 10

Besprechung am 13.01.2017

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Diesen Freitag (23.12.) sind bereits Ferien, daher ist keine Übung und wir können dieses Blatt erst am 13.01. besprechen.

Aufgabe 1. Bereite die Vorlesung und Übung nach, und fertige eine Liste mit *mindestens* fünf Fragen dazu an (Korrekturen zu den Notizen sind ebenfalls sehr willkommen).

Aufgabe 2 (Noethersche Ringe und Moduln)**.**
a) Endliche direkte Summen noetherscher Moduln sind noethersch.
b) Ist V ein noetherscher A-Modul und $S \subseteq A$, so ist $S^{-1}V$ noetherscher $S^{-1}A$-Modul.[1]
c) Ist A ein noetherscher Ring und $S \subseteq A$, so ist $S^{-1}A$ ein noetherscher Ring.
d) Für einen endlich erzeugten Modul V über einem noetherschen Ring A ist äquivalent:
(1) V ist flach.
(2) V ist projektiv.
(3) V ist *lokal frei*, d.h. V_P ist freier A_P-modul für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$.
e) Ein Unterring eines noetherschen Rings ist nicht notwendig noethersch.[2]
f) Die Eigenschaft von Ringen, noethersch zu sein, ist nicht lokal.[3]

Aufgabe 3 (Noethersche topologische Räume)**.** Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, falls die Menge seiner offenen Teilmengen bezüglich der Inklusion $\subseteq$ noethersch ist.[4]
a) Jeder Unterraum eines noetherschen Raums ist ebenfalls noethersch.
b) Ein noetherscher Raum hat nur endlich viele irreduzible Komponenten.[5]
c) Ist A noethersch, so ist der topologische Raum $\mathrm{Spec}(A)$ noethersch.
d) Ein noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.

Aufgabe 4 (Jacobson Ringe)**.**
a) Für eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X ist äquivalent:
(1) Die Abbildung $U \mapsto U \cap Y$ ist eine Bijektion zwischen den offenen Teilmengen von X und denen von Y.
(2) Die Abbildung $Z \mapsto Z \cap Y$ ist eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Teilmengen von X und denen von Y.
(3) Ist $Z \subseteq X$ abgeschlossen, so gilt $\overline{Z \cap Y} = Z$. Hierbei ist $\overline{Z \cap Y}$ der Abschluss von $Z \cap Y$ in X.

---

[1] Hinweis: Zeige zunächst, dass die $S^{-1}A$-Untermoduln von $S^{-1}V$ alle von der Form $S^{-1}U$ für U ein A-Untermodul von V sind.

[2] Hinweis: In der Vorlesung haben wir ein Beispiel für einen nicht-noetherschen Ring gesehen. Ist dieser vielleicht Unterring eines noetherschen Rings?

[3] Hinweis: Betrachte $A := \prod_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und zeige, dass A lokal ein Körper ist. Benutze dazu, dass $x^2 = x$ für alle $x \in A$ gilt.

[4] Das ist offensichtlich äquivalent dazu, dass die Menge der abgeschlossenen Teilmengen bezüglich $\subseteq$ artinsch ist.

[5] Hinweis: Wir wissen bereits, dass irreduzible Komponenten abgeschlossen sind. Betrachte die Menge Σ aller abgeschlossenen Teilmengen, die nicht endlich viele irreduzible Komponenten haben. Die Annahme $\Sigma \neq \emptyset$ führt zu einem Widerspruch. Betrachte dazu ein minimales Element von Σ (warum gibt es das?).

Man sagt in diesem Fall, dass Y *sehr dicht* in X ist.[6]
b) Ein Ring A is Jacobson genau dann, wenn $\mathrm{Max}(A)$ sehr dicht in $\mathrm{Spec}(A)$ ist.[7]

Aufgabe 5 (Klassische algebraische Geometrie, modern gesehen)**.** Sei K ein Körper und $A := K[X_1, \ldots, X_n]$.
a) Für ein Ideal $I \trianglelefteq A$ und einen Erweiterungskörper L von K haben wir kanonische Bijektionen

$$\mathrm{Z}_I(L) \simeq \mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(A/I, L) \simeq \mathrm{V}_L(I) \ .$$

Hierbei ist

$$Z_I(L) := \{\mathbf{x} \in L^n \mid f(\mathbf{x}) = 0 \ \forall f \in I\} \subseteq L^n$$

die *Nullstellenmenge* von I über L, und $\mathrm{V}_I(L)$ ist die Menge aller Paare (P, ι) mit $P \in \mathrm{V}(I)$, d.h. $P \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $P \supseteq I$, und einer K-Algebra Einbettung $\iota : \mathrm{k}(P) \hookrightarrow L$.[8]
b) Es ist $\mathrm{Z}_I(K) \subseteq \mathrm{Max}(A)$ unter obiger Bijektion.
c) Sei nun K algebraisch abgeschlossen. Unter obiger Bijektion ist

$$\mathrm{Z}_I(K) = \mathrm{V}(I) \cap \mathrm{Max}(A) =: \mathrm{V}'(I) \ .$$

Die Abbildung $I \mapsto \mathrm{V}'(I)$ ist eine Bijektion zwischen den Radikalidealen in A und den abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Max}(A)$. Die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Max}(A)$ entsprechen also genau den Nullstellenmengen in K^n von Polynomsystemen in n Variablen mit Koeffizienten in K. Wie lautet die Umkehrabbildung von $I \mapsto \mathrm{V}'(I)$?

---

[6] Allgemeiner nennt man einen Morphismus $f : Y \to X$ topologischer Räume einen *Quasi-Isomorphismus*, falls die Abbildung $U \mapsto f^{-1}(U)$ eine Bijektion zwischen den offenen Teilmengen von X und denen von Y ist. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist also sehr dicht, genau dann, wenn die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ ein Quasi-Isomorphismus ist.

[7] Hinweis: Benutze die Charakterisierung in Teil 3 von a) und die Eigenschaften der Operationen I und V.

[8] Hinweis: In Vorlesung 4 haben wir das im Prinzip bereits besprochen (die erste Bijektion sogar allgemeiner).