Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 13.01.2017

Übungsblatt 11

Besprechung am 20.01.2017

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (Verschiedenes)**.**
a) Ein surjektiver Endomorphismus eines noetherschen Moduls ist bereits ein Isomorphismus.[1] Analog ist ein injektiver Endomorphismus eines artinschen Moduls bereits ein Isomorphismus.
b) Die Länge von Moduln endlicher Länge ist eine *additive* Funktion, d.h. ist $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln endlicher Länge, so ist $\mathrm{length}(V) = \mathrm{length}(V') + \mathrm{length}(V'')$.
c) Ein artinscher Ring ist endliches direktes Produkt lokaler artinscher Ringe.[2]

Aufgabe 2 (Schnittmultiplizität ebener Kurven)**.** Sei K ein Körper und sei $A := K[X,Y]$. Man nennt $\mathbb{A}^2_K := \mathrm{Spec}(A)$ die *affine Ebene* über K. Ein irreduzibles Polynom $f \in A$ definiert eine irreduzible *ebene Kurve* $C := \mathrm{V}(f) \simeq \mathrm{Spec}(A/(f))$ in $\mathbb{A}^2_K$. Sei $D := \mathrm{V}(g)$ eine weitere irreduzible ebene Kurve in $\mathbb{A}^2_K$. Der Schnitt der beiden Kurven ist $C \cap D = \mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}(g) = \mathrm{V}(f,g) \simeq \mathrm{Spec}(B)$ mit $B := A/(f,g)$. Die *Schnittmultiplizität* $i_p(C,D)$ von C und D in einem abgeschlossenem Punkt $p \in \mathbb{A}^2_K$ ist definiert als die Länge des A_p-Moduls B_p.[3]
a) Ist $f \neq g$, so ist B ist artinsch. Insbesondere ist $i_p(C,D) < \infty$ und $C \cap D$ ist endlich. (Hinweis: Benutze das Resultat aus Aufgabe 4 unten!)
b) Es ist $i_p(C,D) = 0$ genau dann, wenn $p \notin C \cap D$.
c) Sei $p = (X,Y) \in \mathbb{A}^2_K$ der Ursprung, $C = \mathrm{V}(X)$ die X-Achse und $D = \mathrm{V}(Y)$ die Y-Achse. Dann ist $i_p(C,D) = 1$.
d) Sei $p = (X,Y) \in \mathbb{A}^2_K$ der Ursprung, $C = V(X)$ die X-Achse und $D = \mathrm{V}(X + Y^r)$ mit $r \geq 1$. Dann ist $i_p(C,D) = r$. Male ein Bild für $p = 2, 3$.

Aufgabe 3 (Gegenbeispiel)**.** Sei p eine Primzahl und $V_p := \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}_p = \{p\}^{-1}\mathbb{Z}$. Dann ist V_p artinscher, aber nicht noetherscher (und damit insbesondere nicht endlich erzeugter) $\mathbb{Z}$-Modul.[4]

Aufgabe 4 (Primspektrum von $\mathbb{Z}[X]$ und $K[X,Y]$)**.** Ist R ein Hauptidealbereich, so sind die Primideale von $R[X]$ genau (ohne Überschneidungen):

(0) $P = 0$,
(1) $P = (f)$ mit $f \in R[X]$ irreduzibel.
(2) (p, f) mit $p \in R$ irreduzibel und $f \in R[X]$ irreduzibel in $(R/(p))[X]$.

---

[1] Hinweis: Betrachte den Kern von Potenzen des Endomorphismus.
[2] Hinweis: Ein Satz aus der Vorlesung hilft!
[3] Idee: Das Spektrum des Rings B entspricht dem Schnitt $C \cap D$. Für einen Punkt $p \in \mathbb{A}^2_K = \mathrm{Spec}(A)$, also einem Primideal in A, beschreibt die Lokalisierung B_p die lokale Struktur von $C \cap D$ im Punkt p. Die Länge von B_p als A_p-Modul beschreibt nun die Komplexität dieser lokalen Struktur relativ zur lokalen Struktur A_p des umgebenden Raums $\mathbb{A}^2_K$ in diesem Punkt.
[4] Zeige, dass jeder Untermodul von $1/p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ erzeugt wird.

Inklusionen treten hierbei nur in der Form $(0) \subset (1) \subset (2)$ auf. Die Primideale in (2) sind alle maximal.[5] Wie sehen folglich die Primideale von $\mathbb{Z}[X]$ und von $K[X, Y]$ aus?

[5] Hinweis: Der Fall R ein Körper ist bekannt, sei also R kein Körper. Zeige zunächst, dass alle Ideale in der Tat Primideale sind und dass die Primideale in (2) maximal sind. Zeige weiterhin, dass es keine Überschneidungen gibt. Sei nun $0 \neq P \in \operatorname{Spec} R[X]$. Dann ist $P \cap R = (0)$ oder $P \cap R = (p)$ mit $p \in R$ irreduzibel. Betrachte jetzt diese beiden Fälle. Der Fall $P \cap R = (p)$ ist nicht schwierig. Im Fall $P \cap R = (0)$ zeige folgendes: es existiert ein irreduzibles Element $f \in P$. Angenommen, P kein Hauptideal. Dann findet man ein weiteres irreduzibles Element $g \in P$, also $f \neq g$. Das Gauß-Lemma impliziert nun, dass $f, g \in K[X]$ immer noch irreduzibel sind, wobei $K := \mathrm{Q}(R)$. Dann ist aber $(f, g) = 1$ in $K[X]$. Wie führt das zu einem Widerspruch?