Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 20.01.2017

Übungsblatt 12

Besprechung am 27.01.2017

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Aufgabe 1. Die Krull-Dimension eines Rings A verallgemeinernd definieren wir die *Krull-Dimension* eines topologischen Raums X als das Supremum der Längen von Ketten irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von X.
a) Für einen Ring A gilt $\dim A = \dim \operatorname{Spec}(A)$.
b) Ist $Y \subseteq X$, so ist $\dim Y \leq \dim X$. Ist X irreduzibel und $\dim X < \infty$, so impliziert $Y \subsetneq X$ auch $\dim Y < \dim X$.
c) $\dim X = \sup_\lambda \dim X_\lambda$, wobei X_λ die irreduziblen Komponenten von X durchläuft.

Aufgabe 2. Für jedes Ideal $I \trianglelefteq A$ ist $\dim I = \dim \sqrt{I}$. Insbesondere ist $\dim A = \dim A/\sqrt{0}$.

Aufgabe 3.
a) Ist $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung, so ist $\dim A = \dim B$.
b) Ist $\mathcal{O}_L$ der Ring algebraischer Zahlen in einem algebraischen Zahlkörper L, so ist $\dim \mathcal{O}_L = 1$.

Aufgabe 4. Sei A ein lokaler Hauptidealbereich aber kein Körper (z.B. die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ in einem maximalen Ideal). Sei π ein Erzeuger des maximalen Ideals von A.
a) $M_1 := (\pi X - 1)$ und $M_2 := (\pi, X)$ sind maximale Ideale in $A[X]$.
b) $\operatorname{codim} M_1 = 1$ und $\operatorname{codim} M_2 = 2$.
c) $\dim M_1 + \operatorname{codim} M_1 < \dim A[X]$.