Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 27.01.2017

Übungsblatt 13

Besprechung am 03.02.2017

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $A := K[X,Y]/(X^2, XY)$. Sei $\overline{X}$ bzw. $\overline{Y}$ das Bild von X bzw. Y in A.
a) $\dim A = 1$.
b) $(\overline{X})$ ist das eindeutige minimale Primideal in A.
c) $\overline{Y}$ ist Nullteiler in A.
d) $\mathrm{codim}_A(\overline{Y}) = 1$.

Aufgabe 2. Bestimme:
a) $\dim K[X,Y,Z]/(XY - Z^2)$.
b) $\dim \mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 - Y^3)$.
c) $\dim \mathbb{Z}_{(2)}[X]/(2X - 1)$.

Aufgabe 3 (Diskrete Bewertungsringe, I)**.** Eine *diskrete Bewertung* auf einem Körper K ist ein surjektiver Gruppenmorphismus $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ mit $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y \in K$ mit $x + y \neq 0$. Man setzt dann formal $v(0) := \infty$.
a) $A := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ ist ein Unterring von K. Er wird der *Bewertungsring* von v genannt. Allgemein ist ein *diskreter Bewertungsring* ein Integritätsbereich, der Bewertungsring einer diskreten Bewertung auf seinem Quotientenkörper ist.[1]
b) $A^\times = \{x \in A \mid v(x) = 0\}$.
c) A ist lokal mit maximalem Ideal $M := \{x \in A \mid v(x) \geq 1\}$.
d) Ein Element $\pi \in A$ mit $v(\pi) = 1$ nennt man *uniformisierendes Element* von A. Jedes $x \in A$ lässt sich schreiben als $x = u\pi^n$ mit eindeutigem $u \in A^\times$ und $n \in \mathbb{N}$.
e) Für $x \in A$ ist $v(x)$ die höchste Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass x von π^n geteilt wird.
f) $M^n = (\pi^n) = \{x \in A \mid v(x) \geq n\}$ und jedes Ideal $\neq 0$ ist von dieser Form.
g) $\mathrm{Q}(A) = K$.
h) Ist $x \in K$, so ist bereits $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$.

Aufgabe 4 (Diskrete Bewertungsringe, II)**.** Für einen lokalen Integritätsbereich A ist äquivalent:
a) A ist diskreter Bewertungsring.
b) A ist eindimensional, noethersch und normal.
c) A ist eindimensional, noethersch und das maximale Ideal ist Hauptideal.[2]

Aufgabe 5 (Dedekind-Bereiche)**.** Für einen Integritätsbereich A ist äquivalent:
a) A ist noethersch und A_P ist diskreter Bewertungsring für alle $0 \neq P \in \mathrm{Spec}(A)$.
b) A ist eindimensional, noethersch und normal.
Einen solchen Ring nennt man *Dedekind-Bereich.*

---

[1] Im Deutschen ist die Bezeichnung etwas unglücklich, denn *diskret* bezieht sich nicht auf den Ring, sondern auf die Bewertung. Im Englischen heißt es *discrete valuation ring*, hier ist es präziser.

[2] Hinweis: Wähle dazu $a \in M \setminus M^2$, $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $M^n \subseteq (a)$ und $b \in M^{n-1}$ mit $b \notin (a)$ (warum geht das?). Angenommen, $M \neq (a)$. Es ist $x := \frac{b}{a} \in K \setminus A$ und damit nicht ganz über A. Es gilt $xM \not\subseteq M$, denn sonst wäre das treuer endlich erzeugter $A[x]$-Modul und das ist ein Widerspruch (wieso?). Also $xM = A$ und das gibt einen Widerspruch.