Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 03.02.2017

Übungsblatt 14

Besprechung am 10.02.2017

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1). Weiterhin steht K immer für einen Körper.

Aufgabe 1. $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist regulär im Ursprung $(X_1, \ldots, X_n)$, d.h. $K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$ ist regulärer lokaler Ring.

Aufgabe 2. $K[X, Y, Z]/(XY - Z^2)$ ist nicht regulär im Ursprung. Zeige dazu: Ist A lokaler noetherscher regulärer Ring mit maximalem Ideal M und $a \in M^2$, so ist $A/(a)$ nicht regulär.

Aufgabe 3. Sei $A := \mathbb{Z}[3X, X^2, X^3] \subseteq \mathbb{Z}[X]$.
a) Die Normalisierung von A ist $\mathbb{Z}[X]$.
b) $\dim A = 2$.
c) $M := (3, 3X, X^2, X^3) \in \mathrm{Max}(A)$.
d) $\dim A_M = 2$.
e) Das Element 3 ist eine reguläre Sequenz maximaler Länge in A_M.
f) A_M ist nicht regulär.

Aufgabe 4. Sei $\mathrm{Char}(K) \neq 2, 3$ und $A := K[X, Y]/(X^3 - Y^2)$.
a) A_M ist regulär für $M = (X - 1, Y - 1)$.[1]
b) A_M ist nicht regulär für $M = (X, Y)$.

Aufgabe 5 (Diskrete Bewertungsringe, III)**.** Für einen lokalen Ring A ist äquivalent:
a) A ist diskreter Bewertungsring.
b) A ist noethersch, eindimensional und regulär.

Aufgabe 6 (Dedekind-Bereiche, II)**.** Für einen Integritätsbereich A ist äquivalent:
a) A ist Dedekindbereich.
b) A ist eindimensional, noethersch und regulär, d.h. A_M ist regulär für alle $M \in \mathrm{Max}(A)$.

[1] Hinweis: Zeige, dass MA_M Hauptideal ist.