Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 21.10.2016

Übungsblatt 2

Besprechung am 28.10.2016

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Anmerkung: Aufgabe 3 zu Polynomringen sieht viel aus, ist aber eigentlich wenig spektakulär. Dennoch sind hier einige sehr wichtige Grundideen, die ihr euch auf jeden Fall klar machen solltet. In gewissem Sinn ist die Bijektion (1) der Beginn von algebraischer Geometrie...

Aufgabe 1 (Ideale)**.**
Wir betrachten die Menge $\mathrm{Ideals}(A)$ der Ideale eines Rings A. Dies ist mit der Inklusion $\subseteq$ eine partiell geordnete Menge. Wir haben darauf die drei Operationen $\cap$, $+$ und $\cdot$ definiert.[1]
a) $\cdot$ und $+$ erfüllen das *Distributivgesetz*:

$$I(J+K) = IJ + IK \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

b) $\cap$ und $+$ erfüllen *nicht* notwendig das Distributivgesetz.
c) $\cap$ und $+$ erfüllen das *modulare Gesetz*: Ist $J \subseteq I$ oder $K \subseteq I$, so gilt

$$I \cap (J+K) = (I \cap J) + (I \cap K) \ .$$

d) Es ist $IJ \subseteq I \cap J$. Im Allgemeinen gilt *nicht* Gleichheit. Sind aber I und J koprim, so gilt Gleichheit.
e) Ist $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine *endliche* Familie von Ringen, so ist kanonisch

$$\mathrm{Ideals}\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ideals}(A_\lambda) \ .$$

f) Aussage **e)** ist für *unendliche* Familien immer falsch.
g) Male $\mathrm{Ideals}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})$, $\mathrm{Ideals}((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ und $\mathrm{Ideals}(\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X))$ als Graph bezüglich der Inklusion.

Aufgabe 2 (Chinesischer Restsatz)**.** Sei A ein Ring und seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in A.
a) Die Quotientenabbildungen $q_i : A \to A/I_i$ induzieren zusammen einen Ringmorphismus

$$\varphi : A \to \prod_{i=1}^{n} A/I_i \ .$$

b) φ ist injektiv genau dann, wenn $\bigcap_{i=1}^n I_i = 0$.
c) φ ist surjektiv genau dann, wenn die I_i paarweise koprim sind, also I_i und I_j sind koprim für alle $i \neq j$.
d) Sind die I_i paarweise koprim, so induziert φ einen Ringisomorphismus

$$A/\bigcap_{i=1}^{n} I_i \simeq \prod_{i=1}^{n} A/I_i \ .$$

Weiterhin gilt $\bigcap_{i=1}^n I_i = \prod_{i=1}^n I_i$.

Aufgabe 3 (Polynomringe)**.** Sei $(M,+)$ ein Monoid. Wir führen wie folgt eine multiplikative Schreibweise für M ein. Sei X ein formales Symbol und $\underline{M}$ die Menge aller formalen Ausdrücke der Form X^μ mit $\mu \in M$. Mit der Multiplikation $X^\mu X^\nu := X^{\mu+\nu}$ ist $\underline{M}$ ein Monoid, der durch $\mu \mapsto X^\mu$ kanonisch isomorph zu M ist. Sei nun $R[M]$ die Menge aller Tupel $(r_\mu)_{\mu \in M} \in R^M$ mit

[1] In der Vorlesung haben wir besprochen, dass $\cap$ ein *Infimum* und $+$ ein *Supremum* ist. Mit $\cap$ und $+$ wird $\mathrm{Ideals}(A)$ also zu einer Struktur names *Verband* (engl. *lattice*).

$r_\mu = 0$ für fast alle μ. Wir schreiben für so ein Tupel formal $\sum_{\mu\in M} r_\mu X^\mu$. Auf dieser Menge definieren wir eine Addition und eine Multiplikation wie folgt:

$$\sum_{\mu\in M} r_\mu X^\mu + \sum_{\mu\in M} s_\mu X^\mu := \sum_{\mu\in M} (r_\mu + s_\mu) X^\mu$$

$$\left(\sum_{\mu\in M} r_\mu X^\mu\right) \cdot \left(\sum_{\nu\in M} s_\nu X^\nu\right) := \sum_{\xi\in M} \left(\sum_{\substack{\mu,\nu\in M \\ \mu+\nu=\xi}} r_\mu s_\nu \right) X^\xi \ .$$

a) Obige Operationen zusammen mit der Abbildung $R \to R[M]$, $r \mapsto rX^0$, machen $R[M]$ zu einer R-Algebra. Dies ist der *Monoidring* von M über R.

b) Die Abbildung $\underline{M} \to (R[M], \cdot)$, $X^\mu \mapsto X^\mu$, ist ein Monoidmorpismus.

c) Jetzt betrachten wir den Spezialfall des Monoids $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ für eine (nicht notwendig endliche) Menge Λ. Das sind einfach die Tupel $\mu \in \mathbb{N}^\Lambda$ mit $\mu_\lambda = 0$ für fast alle λ mit der komponentenweisen Addition. Für $\lambda \in \Lambda$ sei $\varepsilon_\lambda \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ das Tupel dessen λ-Komponente gleich 1 ist und dessen übrige Komponenten gleich 0 sind. In $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ gilt dann $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu_\lambda \varepsilon_\lambda$ für jedes $\mu \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$. Setzen wir nun $X_\lambda := X^{\varepsilon_\lambda}$ in $\underline{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$, so heißt das, dass

$$X^\mu = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^{\mu_\lambda}$$

in $\underline{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$. Der Monoidring $R[\mathbb{N}^{(\Lambda)}]$ heißt der *Polynomring* vom Rang $|\Lambda|$ über R. Man schreibt dafür auch $R[X_\lambda, \lambda \in \Lambda]$. Mache dir klar, dass obige Operationen wirklich genau die offensichtliche Addition und Multiplikation von Polynomen in den Variablen X_λ ist.

d) Der Polynomring erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist A eine R-Algebra und $\varphi : \Lambda \to A$ eine Abbildung (d.h. man wählt für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein Element $a_\lambda \in A$), so gibt es genau einen R-Algebrenmorphismus $\Phi : R[X_\lambda, \lambda \in \Lambda] \to A$, sodass

$$\Phi(X_\lambda) = \varphi(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \Lambda$. Dies definiert eine kanonische Bijektion

$$A^\Lambda \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(R[X_\lambda, \lambda \in \Lambda], A) \ , \tag{1}$$

wobei letztere Menge einfach die Menge der R-Algebrenmorphismen ist.

e) Jede R-Algebra ist Quotient eines Polynomrings über R. Kann man einen Polynomring endlichen Rangs wählen, so heißt A *endlich erzeugte R-Algebra* oder auch *R-Algebra endlichen Typs*.

f) Ist $\Lambda' \subseteq \Lambda$, so gibt es einen kanonischen R-Algebrenisomorphismus

$$R[X_\lambda, \lambda \in \Lambda] \simeq (R[X_\lambda, \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'])[X_\lambda, \lambda \in \Lambda'] \ .$$

g) Der Polynomring $R[X_1, \ldots, X_n]$ vom endlichen Rang $n \in \mathbb{N}$ ist ein Integritätsbereich genau dann, wenn R ein Integritätsbereich ist.

h) Ist R ein Integritätsbereich, so ist der Polynomring $R[X]$ in einer Variablen ein Hauptidealbereich genau dann, wenn R ein Körper ist. Insbesondere ist z.B. $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealbereich.