Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 28.10.2016

Übungsblatt 3

Besprechung am 04.11.2016

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (Allgemeines zu Primidealen)**.**
a) Ein Ring A ist lokal genau dann, wenn $A \setminus A^\times$ ein Ideal in A ist. In diesem Fall ist $A \setminus A^\times$ das maximale Ideal.
b) In einem Hauptidealbereich sind alle Primideale $P \neq 0$ maximal.
c) Ein *minimales Primideal* über einem Ideal I in einem Ring A is definiert als minimales Element in $V(I) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid P \supseteq I\}$. Für jedes $I \neq A$ gibt es ein minimales Primideal über I.
d) Ist R ein Ring, so ist $\mathrm{Nil}(R[X]) = \mathrm{Jac}(R[X])$.

Aufgabe 2 (Radikale)**.** Sei A ein Ring und sei $I, J \trianglelefteq A$.
a) $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$.
b) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.
c) Finde ein Beispiel mit $\sqrt{I+J} \neq \sqrt{I} + \sqrt{J}$.

Aufgabe 3 (Beispiele)**.**
Im Folgenden sei K immer ein Körper.
a) $(X_1, \ldots, X_r)$ ist Primideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ für alle $0 \leq r \leq n$. Wir haben also eine Kette $(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n)$ in $\mathrm{Spec}(K[X_1, \ldots, X_n])$.
b) Sei $p \in K[X]$ und $\phi : K[X_1, X_2] \to K[X]$ der durch $X_1 \mapsto X$ und $X_2 \mapsto p$ definierte Morphismus, also $f \mapsto f(X, p)$. Es ist $\mathrm{Ker}\,\phi = (X_2 - p(X_1))$.
c) Ist $(X_1 + X_2 - 1) \subseteq K[X_1, X_2]$ ein Primideal?
d) Bestimme $\mathrm{Jac}(\mathbb{Z}[X])$.
e) Beschreibe $\mathrm{Spec}(K[X])$ und $\mathrm{Max}(K[X])$ allgemein und genauer für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
f) Beschreibe $\mathrm{Spec}(K[X_1, X_2]/(X_1^2 - X_2^2))$.
g) Bestimme $\sqrt{(X^3 - X^2 - X + 1)}$ in $K[X]$.
h) Bestimme $\sqrt{(X_1^2 - X_2X_3, X_1(1 - X_3))}$ in $K[X_1, X_2, X_3]$.

Aufgabe 4 (Kategorien)**.** Lest euch diesen Text bitte einfach durch, ich werde ihn in der Übung nochmal ausführlich besprechen.
Wir wissen, dass man die Menge aller Mengen nicht bilden kann (*Russels Paradoxon*). Daher erweitert man die gewöhnliche Mengentheorie (ZFC, kurz für Zermelo–Fraenkel + Auswahlaxiom) um weitere Objekte namens *Klassen*. Klassen sind einfach “sehr große Mengen”. Jede Menge ist eine Klasse, man kann die Klasse aller Mengen bilden und mit Klassen ansonsten genauso operieren wie mit Mengen. Die so entstandene Theorie heißt *Neumann–Bernays-Gödel* Mengentheorie. Natürlich darf man aber nicht die Klasse der Klassen bilden, dafür müsste man einen noch größeren Typ hinzufügen (gewöhnlich *Konglomerat* genannt). Ihr seht, dass man das beliebig weiter spinnen kann...
Wir wollen jetzt den Begriff einer *Kategorie* und eines *Funktors* einführen. Für uns wird es nur eine Formalität sein, allerdings lassen sich damit gewisse Eigenschaften sehr kompakt zusammenfassen. Das werde ich in der Vorlesung auch gelegentlich tun.

Definition. Eine *Kategorie* ist eine Klasse $\mathcal{C}$ von *Objekten* zusammen mit einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ von *Morphismen von A nach B* für alle $A,B \in \mathcal{C}$ und einer Operation

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

für alle $A,B,C \in \mathcal{C}$, genannt *Komposition* von Morphismen, sodass gilt:

- *Assoziativität.* Ist $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ und $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$, so gilt
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \ .$$
- *Identität.* Für jedes Objekt $B \in \mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,B)$ mit $\mathrm{id}_B \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_B = g$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ und $g \in \mathcal{C}(B,C)$.

Ein *(kovarianter) Funktor* von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$ ist eine Abbildung $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zusammen mit Abbildungen

$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$$

für alle $A,B \in \mathcal{C}$, sodass gilt:

- $F_{B,C}(g) \circ F_{A,B}(f) = F_{A,C}(g \circ f)$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$.
- $F_{A,A}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \mathcal{C}$.

Man schreibt meist einfach $F(f)$ für $F_{A,B}(f)$. Ein *kontravarianter Funktor* ist ganz ähnlich wie ein Funktor, nur dass die Kompatibilität mit der Komposition umgedreht wird, d.h. es soll $F_{A,C}(g \circ f) = F_{A,B}(f) \circ F_{B,C}(g)$ gelten.

a) Macht euch klar, das ihr schon viele Beispiele von Kategorien kennt:
- Die Kategorie Set der Mengen mit Abbildungen von Mengen als Morphismen.
- Die Kategorie Grp der Gruppen mit Gruppenmorphismen.
- Die Kategorie CRing der kommutativen Ringe (assoziativ mit 1) mit Ringmorphismen.
- Die Kategorie $\mathsf{CAlg}(R)$ der kommutativen R-Algebren über einem kommutativen Ring R mit R-Algebrenmorphismen.
- Die Kategorie Top der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.

b) Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ in der Liste in **a)** kennt ihr auch schon einen offensichtlichen Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$. In den Beispielen hat nämlich jedes Objekt A eine zugrundeliegende Menge $F(A)$ und jeder Morphismus f eine zugrundeliegende Abbildung $F(f)$ von Mengen. Dieser Funktor hat die Eigenschaft, dass $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(F(A),F(B))$ injektiv ist für alle $A,B \in \mathcal{C}$. Man nennt solch einen Funktor auch *treu*. Eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *konkret*, wenn es einen treuen Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ gibt. Es gibt wichtige Beispiele nicht konkreter Kategorien.

c) Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ ein Isomorphismus, so ist auch $F(f)$ ein Isomorphismus. Die Umkehrung gilt nicht notwendig: In welchen Beispielen in **a)** gilt sie, in welchen nicht?

d) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $A \in \mathcal{C}$, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ ein Funktor (selbst überlegen, wie die Definition auf Morphismen ist).

e) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $B \in \mathcal{C}$, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,B) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ ein kontravarianter Funktor.

f) Die Abbildung $\mathrm{Spec} : \mathsf{CRing} \to \mathsf{Top}$ definiert auf Objekten durch $A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$ und auf Morphismen durch $f \mapsto \mathrm{Spec}(f)$, ist ein kontravarianter Funktor.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)**.** Lest euch die Einleitung zu *Éléments de géométrie algébrique* von A. Grothendieck und J. Dieudonné durch. Eine deutsche Version gibt es hier: http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/~thiel/publications/introduction_to_ega.pdf.