Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 04.11.2016

Übungsblatt 4

Besprechung am 11.11.2016

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (Zariski-Topologie).
Sei A ein Ring.
a) Ist I ein Ideal in A, so ist $\mathrm{Spec}(A/I)$ homöomorph (d.h. isomorph in Top) zu $\mathrm{V}(I)$.
b) Die Mengen $\mathrm{D}(f) := \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{V}(f)$, $f \in A$, bilden eine *Basis* der Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$, d.h. jede offene Menge ist Vereinigung solcher Mengen.
c) $\mathrm{Spec}(A)$ ist *quasi-kompakt*, d.h. jede offene Überdeckung von $\mathrm{Spec}(A)$ besitzt eine *endliche* Teilüberdeckung.

Aufgabe 2 (Beispiel). Sei K ein Körper und $I := (X_1X_3 - X_2^2, X_1^3 - X_2X_3) \trianglelefteq K[X_1, X_2, X_3]$. Zerlege $\mathrm{V}(I)$ in irreduzible Komponenten.

Aufgabe 3 (Verschiedenes zu Moduln). Sei A ein Ring.
a) Jeder A-Modul ist Quotient eines A-Moduls der Form $A^{(\Lambda)} := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A$ für eine Menge Λ.
b) Ist $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von A-Moduln und W ein A-Modul, so ist kanonisch

$$\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, W) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_A(V_\lambda, W)$$

als A-Moduln.
c) Ist V ein A-Modul und $(W_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von A-Moduln, so ist kanonisch

$$\mathrm{Hom}_A(V, \prod_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_A(V, W_\lambda)$$

als A-Moduln.
d) Sei $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von A-Moduln und $U_\lambda \subseteq V_\lambda$ ein Untermodul für jedes $\lambda \in \Lambda$. Dann ist $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ kanonisch ein Untermodul von $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ und es gilt kanonisch

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \right) / \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda / U_\lambda) \ .$$

Aufgabe 4 (Exakte Sequenzen). Sei A ein Ring. Eine Folge

$$\cdots V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \quad i \in I$$

von A-Modulmorphismen, wobei I ein beliebiges Intervall in $\mathbb{Z}$ ist, heißt auch *Sequenz*. Ist $i \in I$ mit $i+1 \in I$, so heißt die Sequenz *exakt* an der Stelle i, falls $\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$ gilt. Sie heißt *exakt* schlechthin, wenn sie exakt an jeder Stelle $i \in I$ mit $i+1 \in I$ ist.
a) Ist $f : V \to W$ ein A-Modulmorphismus, so ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W$$

exakt genau dann, wenn f injektiv ist.
b) Ist $f : V \to W$ ein A-Modulmorphismus, so ist die Sequenz

$$V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$$

exakt genau dann, wenn f surjektiv ist.

c) Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{q} W \longrightarrow 0$$

In diesem Fall ist ι injektiv, q surjektiv und $W \simeq V/\operatorname{Im}\iota$. Andererseits definiert jeder Modul V und Untermodul U kanonisch eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow V/U \longrightarrow 0\ .$$

d) Der *Kokern* eines A-Modulmorphismus $f : V \to W$ ist definiert als $\operatorname{Coker} f := W/\operatorname{Im} f$. Es existiert eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0\ .$$

e) Ist V ein A-Modul und sind U, U' Untermoduln von V, so existiert eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U \cap U' \longrightarrow U \oplus U' \longrightarrow U + U' \longrightarrow 0\ .$$

f) Sei V ein A-Modul. Ist

$$0 \longrightarrow W' \xrightarrow{g'} W \xrightarrow{g} W''$$

eine exakte Sequenz, so ist auch die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(V, W') \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(V,g')} \operatorname{Hom}_A(V, W) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(V,g)} \operatorname{Hom}_A(V, W'')$$

exakt. Man sagt auch, der Funktor $\operatorname{Hom}_A(V, -) : \mathsf{Mod}(A) \to \mathsf{Mod}(A)$ ist *links-exakt*.