Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 18.11.2016

Übungsblatt 6

Besprechung am 25.11.2016

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (Kleinigkeiten zum Tensorprodukt)**.**
a) Ist I ein Ideal in einem Ring A und V ein A-Modul, so ist der A/I-Modul V/IV kanonisch isomorph zu $(A/I) \otimes_A V$.
b) Sind V_1, V_2, V_3 drei A-Moduln, so gibt es einen kanonischen A-Modulisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(V_1 \otimes_A V_2, V_3) \simeq \mathrm{Hom}_A(V_1, \mathrm{Hom}_A(V_2, V_3))$$

Diese Relation besagt, dass die Funktoren $- \otimes_A V_2$ und $\mathrm{Hom}_A(V_2, -)$ *adjungiert* sind.
c) Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringmorphismus, V ein A-Modul und W ein B-Modul, so gibt es einen kanonischen A-Modulisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_B(V^B, W) \simeq \mathrm{Hom}_A(V, W_A) \ .$$

Diese Relation besagt, dass die Funktoren $(-)^B$ und $(-)_A$ adjungiert sind.
d) Sind V, W freie A-Moduln mit Basen $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $(w_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, so ist $V \otimes_A W$ freier A-Modul mit Basis $(v_\lambda \otimes w_\sigma)_{\lambda \in \Lambda, \sigma \in \Sigma}$. Insbesondere ist $\mathrm{rk}(V \otimes_A W) = \mathrm{rk}V \cdot \mathrm{rk}W$.
e) Ist A ein lokaler Ring und sind V, W endlich erzeugte A-Moduln mit $V \otimes_A W = 0$, so ist bereits $V = 0$ oder $W = 0$ (Anleitung: Maximales Ideal M von A wählen, Ringwechsel nach $K := A/M$ gibt $(V \otimes_A W)^K \simeq V^K \otimes_K W^K$ und nun Nakayama-Lemma).

Aufgabe 2 (Projektive Moduln)**.**
a) Für einen A-Modul P ist äquivalent:
(1) $\mathrm{Hom}_A(P, -) : \mathsf{Mod}(A) \to \mathsf{Mod}(A)$ ist ein exakter Funktor.
(2) P is direkter Summand eines freien A-Moduls, d.h. es gibt Q mit $P \oplus Q \simeq A^{(\Lambda)}$ für ein Λ.
(3) Jede kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

spaltet auf, d.h. es gibt einen A-Modulmorphismus $s : P \to V$ mit $gs = \mathrm{id}_P$ (man nennt s einen *Schnitt* von g).
(4) Für jeden Morphismus $h : P \to W$ und jeden surjektiven Morphism $f : V \twoheadrightarrow W$ existiert ein $\tilde{h} : P \to V$, sodass

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{h}"] \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert.
In diesem Fall nennt man P einen *projektiven* A-Modul.
b) Freie Moduln sind projektiv.
c) Projektive Moduln sind flach.
d) Wir haben eine Hierarchie

$$\text{frei} \subseteq \text{projektiv} \subseteq \text{flach} \subseteq \text{torsionsfrei} \ .$$

Aufgabe 3 (Vererbung unter Ringwechsel)**.**
Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringmorphismus und V ein A-Modul.

a) Ist V frei mit Basis $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, so ist V^B freier B-Modul mit Basis $(1 \otimes v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
b) Ist V projektiv, so ist V^B projektiver B-Modul.
c) Ist V flach, so ist V^B flacher B-Modul.

Aufgabe 4 (Beispiele und Gegenbeispiele)**.**
a) $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, wobei $d := \mathrm{ggT}(m, n)$.
b) Sei V ein $\mathbb{Z}$-Modul (abelsche Gruppe) mit $\mathrm{T}(V) = V$, z.B. eine endliche abelsche Gruppe oder $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dann gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V = 0$.
c) Ist R ein Ring, so gibt es einen kanonischen R-Modulisomorphismus $R[X] \otimes_R R[Y] \simeq R[X, Y]$.
d) Sei $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Der A-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist projektiv aber nicht frei.
e) Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ ist flach, aber nicht projektiv.
f) Sei K ein Körper und $A := K[X, Y]$. Der A-Modul $(X, Y) \subseteq A$ ist torsionsfrei aber nicht flach.