Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 25.11.2016

Übungsblatt 7

Besprechung am 02.12.2016

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Erinnerung: Freitag Halbzeit-Test!

Aufgabe 1 (Kleinigkeiten zur Lokalisierung).
a) Sei V ein A-Modul und $U \subseteq V$ ein Untermodul. Für $S \subseteq A$ ist kanonisch

$$S^{-1}(V/U) \simeq S^{-1}(V)/S^{-1}(U)$$

als $S^{-1}A$-Moduln.
b) Ist A ein Integritätsbereich und $S \subseteq A$, so ist auch $S^{-1}A$ ein Integritätsbereich.
c) Für jedes $f \in A$ ist $\mathrm{Spec}(A_f)$ homöomorph zu $\mathrm{D}(f) := \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{V}(f)$.
d) Für jedes $f \in A$ ist A_f isomorph zu $A[X]/(fX-1)$ als A-Algebren.
e) Für einen Körper K sei $K[X, X^{-1}] := K[X]_X = \{X\}^{-1}K[X]$ der *Laurent-Polyomring* über K. Beschreibe diesen Ring explizit und zeige, dass es ein Hauptidealbereich ist.
f) Lokalisierung ist transitiv, d.h. sind $S \subseteq T \subseteq A$ Teilmengen und $U := j_S(T) \subseteq S^{-1}A$, wobei $j_S : A \to S^{-1}A$ der Lokalisierungsmorphismus ist, so ist kanonisch $T^{-1}A \simeq U^{-1}(S^{-1}A)$. Selbiges gilt für die Lokalisierung von Moduln.

Aufgabe 2 (Tensorprodukte, nochmal zum Üben).
a) Seien A, B Ringe, V ein A-Modul, W ein B-Modul und X ein (A, B)-*Bimodul*, d.h. X ist sowohl A-Modul als auch B-Modul, sodass $a(xb) = (ax)b$ für alle $a \in A$, $b \in B$ und $x \in X$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$(V \otimes_A X) \otimes_B W \simeq V \otimes_A (X \otimes_B W)$$

von (A, B)-Bimoduln. Das ist ein verallgemeinertes Assoziativgesetz für Tensorprodukte.
b) Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringmorphismus und seien V, W zwei A-Moduln. Dann ist kanonisch $(V \otimes_A W)^B \simeq V^B \otimes_B A^B$ als B-Moduln (d.h. Skalarerweiterung vertauscht mit Tensorprodukt).[1]
c) Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringmorphismus, V ein A-Modul und W ein B-Modul. Dann gibt es einen A-Modulisomorphismus $V \otimes_A W_A \simeq (V^B \otimes_B W)_A$.

Aufgabe 3 (Dualmodul, zum Üben mit Hom-Funktor).
Sei A ein Ring. Wir definieren $(-)^* := \mathrm{Hom}_A(-, A)$, ein kontravarianter Funktor $\mathsf{Mod}(A) \to \mathsf{Mod}(A)$.[2] Man nennt V^* den *Dualmodul* zu V.
a) Zeige noch einmal explizit, dass $(-)^*$ links-exakt ist, d.h. ist

$$V' \to V \to V'' \to 0$$

exakt, so ist auch

$$0 \to (V'')^* \to V^* \to (V')^*$$

exakt (das Umdrehen der Sequenz kommt durch die Kontravarianz).
b) Ist V frei von Rang $n \in \mathbb{N}$, so ist V^* frei von Rang n.
c) Ist V endlich erzeugt und projektiv, so ist V^* endlich erzeugt und projektiv.

[1] Das ist nochmal die allgemeine Version der Aussage, die wir in Aufgabe 6.1e benutzt haben.
[2] Kontravariant heißt, dass wir für einen Morphismus $f : V \to W$ einen Morphismus $f^* : W^* \to V^*$ in umgekehrter Richtung bekommen, siehe Übung 3.4.

d) Es gibt einen kanonischen A-Modulmorphismus $c_V : V \to V^{**}$. Man nennt V^{**} den *Bidualmodul* von V.
e) Man nennt V *reflexiv*, falls c_V ein Isomorphismus ist. Endlich erzeugte projektive Moduln sind reflexiv (zunächst den Fall freier Moduln von endlichem Rang betrachten).
f) Ist V endlich erzeugt und projektiv, so gibt es einen kanonischen A-Modulisomorphismus $V^* \otimes_A W \simeq \mathrm{Hom}_A(V, W)$.