Kommutative Algebra Dr. Ulrich Thiel
WS 2016/2017 02.12.2016

Übungsblatt 8

Besprechung am 09.12.2016

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (Lokale Eigenschaften)**.**
a) Ist V ein A-Modul und $S \subseteq A$ eine Menge, die aus Nicht-Nullteilern besteht, so ist $S^{-1}(\mathrm{T}(V)) = \mathrm{T}(S^{-1}V)$ für einen A-Modul V.[1]
b) Torsionsfreiheit von Moduln über Integritätsbereichen ist eine lokale Eigenschaft.
c) Projektivität *endlich präsentierter* Moduln ist eine lokale Eigenschaft.[2]
d) Über einem beliebigen Ring A ist für einen A-Modul V äquivalent:
(1) V ist endlich präsentiert und flach.
(2) V ist endlich erzeugt und projektiv.

Aufgabe 2. Es gibt endlich erzeugte projektive Moduln, die nicht flach sind. Wir benötigen also die Annahme "endlich präsentiert" in **1d)** und daher ist Projektivität *keine* lokale Eigenschaft für *endlich erzeugte* Moduln. Das folgende Beispiel ist von Vasconcelos (aufbereitet nach Lam):
a) Zeige *Schanuels Lemma*: Sind

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \xrightarrow{f'} M \longrightarrow 0$$

exakte Sequenzen von Modulmorphismen über einem Ring A und sind P und P' projektiv, so ist $K' \oplus P$ isomorph zu $K \oplus P'$. [3]
b) Sei A ein Ring und V ein endlich präsentierter A-Modul. Ist $f : W \twoheadrightarrow V$ ein surjektiver Morphismus von einem endlich erzeugten A-Modul W, so ist $\mathrm{Ker}(f)$ endlich erzeugt. [4]
c) Der $\mathbb{Z}$-Modul $A_0 := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ist mit komponentenweise Addition und Multiplikation ein Ring *ohne* Einselement. Der $\mathbb{Z}$-Modul $A := \mathbb{Z} \oplus A_0$ wird dann ein Ring mit komponentweiser Addition, Multiplikation $(n, a_0) \cdot (n', a_0') := (nn', na_0' + n'a_0 + a_0a_0')$ und dem Einselement $(1, 0)$.
d) Sei $a := (2, 0) \in A$ und $V := (a) \lhd A$, ein endlich erzeugter A-Modul. Wir haben eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathrm{Ann}_A(a) \to A \xrightarrow{\varphi} V \to 0$, wobei φ die Multiplikation mit a ist. Das Ideal $\mathrm{Ann}_A(V) \lhd A$ ist kein endlich erzeugter A-Modul. Also ist V nicht endlich präsentiert nach Teil **b)**.
e) V ist nicht projektiv.[5]
f) V ist flach.[6]

[1]Beachte, dass $\mathrm{T}(V)$ der Torsionsuntermodul von V als A-Modul ist und $\mathrm{T}(S^{-1}(V))$ der Torsionsuntermodul von $S^{-1}V$ als $S^{-1}A$-Modul ist.

[2]Hinweis: In der Vorlesung haben wir $\mathrm{Hom}_{A_P}(V_P, -) \simeq (\mathrm{Hom}_A(V, -))_P$ für V endlich präsentiert gezeigt!

[3]Hinweis: Betrachte $X := \{(p, p') \in P \oplus P' \mid f(p) = f'(p')\}$ und zeige, dass $X \simeq K' \oplus P$ und $X \simeq K \oplus P'$.

[4]Hinweis: Da W endlich erzeugt, gibt es $g : A^k \twoheadrightarrow W$. Bekommen dann exakte Sequenz $0 \to K' \to A^k \xrightarrow{fg} V \to 0$. Haben außerdem exakte Sequenz $0 \to K \to A^n \to V \to 0$ mit K endlich erzeugt, da V endlich präsentiert. Benutze nun Schanuels Lemma und bemerke, dass $g(\mathrm{Ker}\, fg) = \mathrm{Ker}\, f$.

[5]Hinweis: Kann ein endlich erzeugter aber nicht endlich präsentierter Modul projektiv sein?

[6]Zeige, dass V lokal flach, d.h. V_P flach für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Behandle $A_0 \not\subseteq P$ und $A_0 \subseteq P$.