

Halbzeit-Test

Ring steht hier, wie immer, für einen *kommutativen* Ring (mit 1).

Zeit: 40 Minuten. Abgabe anonym. Bei positivem Gesamtausfall gibt es in der nächsten Vorlesung Spekulatius für alle. Bei schlechtem Ausfall gibt es Spekulatius von letztem Jahr.

Aufgabe 1. Gib ein Beispiel eines lokalen Rings, der nicht bereits ein Körper ist.

Aufgabe 2. Bestimme die irreduziblen Komponenten von $\text{Spec}(\mathbb{C}[X, Y]/(X^2, Y^3))$.

Aufgabe 3. Was ist der generische Punkt von $\text{Spec}(\mathbb{Z}[X])$?

Aufgabe 4. Was ist der Restekörper von $(p) \in \text{Spec}(\mathbb{Z}[X])$ für eine Primzahl p ?

Aufgabe 5. Gib ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}[X]$ an, dessen Restekörper echt größer als \mathbb{Q} ist.

Aufgabe 6. Beschreibe $\text{Spec}(\mathbb{C}[X])$ und $\text{Spec}(\mathbb{R}[X])$ so explizit wie möglich.

Aufgabe 7. Beschreibe $\text{Spec}(A_P)$ für $P \in \text{Spec}(A)$. Was ist das maximale Ideal von A_P ?

Aufgabe 8. Seien $P, Q \in \text{Spec}(A)$ mit $P \subseteq Q$. Was ist die Relation zwischen A_P und A_Q ?

Aufgabe 9. Wann ist das Ideal (0) eines Rings A ein Primideal? Was ist $A_{(0)}$ in diesem Fall?

Aufgabe 10. Gib ein Beispiel für einen nicht surjektiven Epimorphismus in der Kategorie kommutativer Ringe an.

Aufgabe 11. Wann ist der Lokalisierungs-Morphismus $j : A \rightarrow S^{-1}A$ injektiv? Gib ein Beispiel an, in dem er nicht injektiv ist.

Aufgabe 12. Sei K ein Körper. Warum ist die $K[X]$ -Algebra

$$\left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in K[X], 0 \neq g \text{ koprim zu } X \right\}$$

flach?

Aufgabe 13. Ist $K[X]/(X^2)$ freier (projektiver, flacher) $K[X]$ -Modul?

Aufgabe 14. Gibt es einen Ring A und nicht-triviale A -Moduln V, W mit $V \otimes_A W = 0$?

Aufgabe 15. Welche \mathbb{Q} -Vektorraum-Dimension hat $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

Aufgabe 16. Wann ist eine Sequenz $V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V''$ von A -Moduln exakt?

Aufgabe 17. Welche Funktoren $F : \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(A)$ haben wir in der Vorlesung besprochen? Was lässt sich jeweils im Allgemeinen über die Exaktheit der Funktoren sagen?

Aufgabe 18. Wie sind die Operatoren I und V zwischen der Menge der Ideale von A und der Menge der Teilmengen von $\text{Spec}(A)$ definiert? Welche Eigenschaften haben sie?

Bitte wenden!

Aufgabe 19. Wir haben eine Hierarchie von A -Moduln

$$\text{frei} \subsetneq \text{projektive} \subsetneq \text{flach} \subsetneq \text{torsionsfrei} .$$

Gib jeweils ein Beispiel dafür an, dass wir im Allgemeinen echte Inklusionen haben. Was lässt sich über die entsprechenden Klassen endlich erzeugter Moduln über einem Hauptidealring oder einem lokalen Ring sagen?

Aufgabe 20. Beschreibe die universelle Eigenschaft der folgenden Konstruktionen: Tensorprodukt von Moduln, direkte Summe von Moduln, direktes Produkt von Moduln, Lokalisierung von Ringen.