Computerpraktikum Polyvalenz Ulrich Thiel
SS 2013

Blatt 05

1 Aufgabe. Seien $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und sei

$$A(a,b,c) := \begin{pmatrix} a+c^2 & 1 & b+1 \\ b & 0 & a^2-1 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q}) \ .$$

Bestimmen Sie für $0 \leq r \leq 3$ jeweils alle $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ sodass der Rang von $A(a,b,c)$ gleich r ist.

2 Aufgabe. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$ die wie folgt definierte Matrix

$$A_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = \left\lfloor \left| \cos\left(\frac{\sin(i)}{\exp(i)}\right) \cdot n \right| \right\rfloor \text{ oder } j = \lfloor |\sin(\cos(i)) \cdot n| \rfloor \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $|\cdot|$ der Absolutbetrag und $\lfloor \cdot \rfloor$ ist die Floor-Funktion, d.h. $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

Berechnen Sie den Rang von A^2 für $n = 250000$. (Sie dürfen hierbei `Cos`, `Sin`, `Exp` verwenden und sich keine Sorgen um Rundungsfehler machen).

3 Aufgabe. Sei $G \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ die durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe und sei $H \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ die durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe. Entscheiden Sie, ob diese beiden Gruppen konjugiert in $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ sind, d.h., ob es ein $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ mit $TGT^{-1} = H$ gibt. Geben Sie im Fall, dass die Gruppen konjugiert sind, auch so ein T an.

4 Aufgabe. Standardmäßig arbeitet Magma mit Elementen symmetrischer Gruppen in der Zykelschreibweise. Man kann aber auch Permutationen selbst wie folgt zu einem Element der symmetrischen Gruppe machen:

```
> S := SymmetricGroup(5);
> sigma := S![2,3,5,1,4];
> sigma;
(1, 2, 3, 5, 4)
```

In diesem Beispiel haben wir die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

als Element der symmetrischen Gruppen S_5 erzeugt. In Zykelschreibweise ist $\sigma = (1,2,3,5,4)$.

Die symmetrische Gruppe S_n wird erzeugt von den *Transpositionen* $s_i := (i, i+1)$, d.h. die Permutationen, die i und $i+1$ vertauschen. Ist also $\sigma \in S_n$, so ist $\sigma = \prod_{r=1}^{l} s_{i_r}$ für ein l und gewisse i_r. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
PermutationInSimpleReflections(sigma::SeqEnum) -> SeqEnum ,
```

die die Indizes $(i_r)_{r=1}^{l}$ einer Darstellung der Permutation σ als Produkt von Transpositionen s_{i_r} wie oben beschreibt.

5 Aufgabe. Für $n \in \mathbb{N}_{>1}$ sei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq n$. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
Pi(n::RngIntElt) -> RngIntElt ,
```

die $\pi(n)$ berechnet. *Auf die schnellste Lösung gibt es einen Extrapunkt.*

6 Aufgabe. Sei K ein Körper und sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
IsDiagonalizable(A::AlgMatElt) -> BoolElt ,
```

die prüft, ob A diagonalisierbar ist.

7 Aufgabe. Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Automorphismus s von V heißt *Spiegelung*, falls der *Fixraum* $H_s := \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V - s)$ eine Hyperebene ist, d.h. $\dim H_s = \dim(V) - 1$. Man nennt dann H_s die *Spiegelungshyperebene* von s. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
IsAReflection(A::AlgMatElt) -> BoolElt, ModTupFld ,
```

die prüft, ob eine Matrix A eine Spiegelung ist, und falls ja, auch deren Spiegelungshyperebene zurückgibt.

8 Aufgabe. Sei K ein Körper. Eine Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ heißt *Spiegelungsgruppe*, falls sie von ihren Spiegelungen erzeugt wird. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
IsAReflectionGroup(G::AlgMatElt) -> BoolElt, RngIntElt ,
```

die prüft, ob eine Matrixgruppe G eine Spiegelungsgruppe ist, und falls ja, die Anzahl ihrer Spiegelungen zurückgibt.

Für Grundkörper der Charakteristik 0 wurden die Spiegelungsgruppen von Shephard–Todd klassifiziert. In Magma kann man auf die unendliche Serie *imprimitiver* Spiegelungsgruppen mittels `ShephardTodd(m,p,n)`, wobei $m, n \in \mathbb{N}_{>1}$ und

$p \in \mathbb{N}_{>0}$ ein Teiler von m ist, zugreifen und man kann auf die *exzeptionellen* Gruppen mittels `ShephardTodd(i)`, wobei i eine ganze Zahl zwischen 4 und 37 ist, zugreifen. Die größte exzeptionelle Shephard–Todd Gruppe ist `ShephardTodd(37)`, auch E_8 genannt, mit einer Ordnung von 696.729.600. Bestimmen Sie die Anzahl der Spiegelungen dieser Gruppe.

9 Aufgabe. Finden Sie eine Spiegelungsgruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$, wobei die Charakteristik von K die Gruppenordnung von G teilt (der sogenannte *modulare* Fall) und alle Spiegelungen in G diagonalisierbar sind. *Auf die Lösung mit dem kleinsten Beispiel gibt es einen Extrapunkt.*

Alle Implementierungen sollen natürlich in Magma erfolgen.