

Projekt 1.10: Steiner-Systeme

Anforderungen:

- (a) Bearbeiten Sie alle in dem Text gestellten Aufgaben.
- (b) Reichen Sie die implementierten Intrinsic ausführlich dokumentiert in einer Datei ein.
- (c) Schreiben Sie einen Text, in dem Sie die Aufgabenstellung kurz in eigenen Worten zusammenfassen, und Ihre Ideen, Ansätze und Ergebnisse erläutern.
- (d) Bereiten Sie einen Vortrag (15-20 Minuten) darüber vor.
- (e) Sind Ergebnisse zu den Aufgaben bereits in der Literatur diskutiert (und das sind sie meistens), möchte ich keine Referenz auf diese Literatur als Lösung bekommen, sondern funktionsfähige Algorithmen (bzw. Beweise), die diese Lösungen ergeben.
- (f) Sie dürfen alle in Magma bereits implementierten Intrinsic benutzen, es sei denn, es ist ausdrücklich untersagt.



Für dieses Projekt dürfen keine bereits existierenden Intrinsic zu Designs und Steiner-Systemen in Magma verwendet werden!

1 Definition. Ein *Steiner-System* ist ein Paar (S, \mathcal{B}) bestehend aus einer endlichen Menge S und einer Menge \mathcal{B} von Teilmengen von S , sodass es $t, k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

- (a) Jede Menge in \mathcal{B} hat k Elemente.
- (b) Jede t -elementige Teilmenge von S liegt in genau einer Menge aus \mathcal{B} .

In diesem Fall heißt das Tripel $(t, k, \#S)$ der *Typ* des Steiner-Systems. Die Elemente von \mathcal{B} heißen die *Blöcke* und die Elemente von S heißen die *Punkte*.

2 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
IsSteinerSystem(S::SetEnum, B::SetEnum) -> BoolElt, RngInt, RngInt, RngInt ,
```

die prüft, ob ein Paar (S, \mathcal{B}) von Mengen ein Steiner-System ist, und falls ja, den Typ zurück gibt.

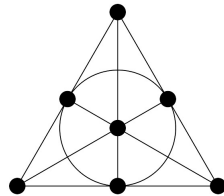
3 Definition. Ein *Morphismus* $(S, \mathcal{B}) \rightarrow (S', \mathcal{B}')$ von Steiner-Systemen ist eine Abbildung $f : S \rightarrow S'$, sodass $f(B) \in \mathcal{B}'$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

4 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
AutomorphismGroupOfSteinerSystem(S::SetEnum, B::SetEnum) -> Grp ,
```

die die Automorphismengruppe eines Steiner-Systems (S, \mathcal{B}) zurückgibt.

5 Aufgabe. Interpretieren Sie die Abbildung unten als Steiner-System vom Typ $(2,3,7)$ und berechnen Sie mittels `AutomorphismGroupOfSteinerSystem` die Automorphismengruppe dieses Steiner-Systems. Was ist die Ordnung dieser Gruppe? Ist diese Gruppe einfach?



6 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
SteinerSystems(t::RngIntElt, k::RngIntElt, n::RngIntElt) -> SetEnum ,
```

die die Menge aller Steiner-Systeme vom Typ (t, k, n) mit Grundmenge $\{1, \dots, n\}$ zurückgibt.

7 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
SteinerSystemsUpToIsomorphism(t::RngIntElt, k::RngIntElt, n::RngIntElt) -> SetEnum ,
```

die ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen von Steiner-Systemen vom Typ (t, k, n) zurückgibt.

8 Aufgabe. Bestimmen Sie für möglichst viele Typen (t, k, n) die Anzahl der Steiner-Systeme und die Anzahl der Isomorphieklassen von Steiner-Systemen vom Typ (t, k, n) . Unter den Typen sollen sich zumindest $(2, 3, n)$ mit $n \leq 9$ und $(3, 4, n)$ mit $n \leq 8$ befinden.

9 Aufgabe. Optimieren Sie Ihre Algorithmen so, dass Sie damit die Anzahl der Isomorphieklassen von Steiner-Systemen vom Typ $(2, 3, 13)$ bestimmen können.