Computerpraktikum Polyvalenz
SS 2013

Ulrich Thiel

Projekt 1.6: Klassifikation quadratischer Flächen

Anforderungen:

(a) **Bearbeiten Sie <u>alle</u> in dem Text gestellten Aufgaben.**

(b) **Reichen Sie die implementierten Intrinsics ausführlich dokumentiert in <u>einer</u> Datei ein.**

(c) **Schreiben Sie einen Text, in dem Sie die Aufgabenstellung kurz in eigenen Worten zusammenfassen, und Ihre Ideen, Ansätze und Ergebnisse erläutern.**

(d) **Bereiten Sie einen Vortrag (15-20 Minuten) darüber vor.**

(e) **Sind Ergebnisse zu den Aufgaben bereits in der Literatur diskutiert (und das sind sie meistens), möchte ich keine Referenz auf diese Literatur als Lösung bekommen, sondern funktionsfähige Algorithmen (bzw. Beweise), die diese Lösungen ergeben.**

(f) **Sie dürfen alle in Magma bereits implementierten Intrinsics benutzen, es sei denn, es ist ausdrücklich untersagt.**

In diesem Projekt dürfen nirgends reelle Zahlen (zum Beispiel Wurzelausdrücke) durch rationale Zahlen approximiert werden. Alles ist rein algebraisch zu behandeln.

1 Definition. Ist R ein kommutativer Ring und $R[\boldsymbol{X}]$ ein Polynomring in den Variablen $\boldsymbol{X} := (X_i)_{i=1}^n$, so bezeichnen wir mit $R[\boldsymbol{X}]_d$ die Menge aller Polynome mit Grad d und mit $R[\boldsymbol{X}]_{\leq d}$ bzw. $R[\boldsymbol{X}]_{<d}$ die Menge aller Polynome mit Grad $\leq d$ bzw. $< d$.

2 Definition. Eine (affine reelle) *echt-quadratische Fläche* in $\mathbb{R}^3$ ist die Nullstellenmenge eines Polynoms $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]_2$. Eine (affine reelle) *quadratische Fläche* in $\mathbb{R}^3$ ist die Nullstellenmenge eines Polynoms $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]_{\leq 2}$.

3. Definiert man für $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]_{\leq 2}$ mit

$$P(X,Y,Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fXY + 2gYZ + 2hZX + 2pX + 2qY + 2rZ + d$$

die Matrix

$$A_P := \begin{pmatrix} a & f & h & p \\ f & b & g & p \\ h & g & c & r \\ p & q & r & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \,,$$

so gilt

$$P(X,Y,Z) = \widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \cdot A_P \cdot \widetilde{\boldsymbol{X}} \,,$$

wobei $\widetilde{\boldsymbol{X}} := (X, Y, Z, 1)$. Die Matrix A_P is offensichtlich symmetrisch und man kann umgekehrt zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ ein Polynom $P_A \in \mathbb{R}[X, Y, Z]_{\leq 2}$ definieren durch

$$P_A(X, Y, Z) := \widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \widetilde{\boldsymbol{X}}$$

mit $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ wie oben.

4. Die Menge $\mathscr{M}$ aller affiner reeller quadratischer Flächen können wir wegen 3 mit $\mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ identifizieren. Man nent $\mathscr{M}$ auch den *Modulraum* affiner reeller quadratischer Flächen. Um $\mathscr{M}$ besser zu verstehen, sollte man nicht $\mathscr{M}$ als ganzes betrachten, sondern modulo einer Äquivalenzrelation, die "ähnlich aussehende" quadratische Flächen identifiziert. Eine sinnvolle solche Äquivalenzrelation ist, zwei quadratische Flächen, gegeben durch Polynome P und P', also äquivalent zu betrachten, wenn sich die zu P und P' gehörigen quadratichen Flächen durch eine *reelle affine Transformation* ineinander überführen lassen, d.h. wenn es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ von der Form

$$B = \begin{pmatrix} B_{\mathrm{u}} & v \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

mit $B_{\mathrm{u}} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, $d \neq 0$ und $v \in \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $A_P = B^{\mathrm{T}} A_{P'} B$. Das heißt im Prinzip, dass die zu P gehörige Fläche sich aus der zu P' gehörigen Fläche durch Verschiebung und Basiswechsel im $\mathbb{R}^3$ ergibt – ein sehr natürlicher Äquivalenzbegriff also. Die zugehörigen Äquivalenzklassen $\mathscr{M}/\sim$ wurden beispielsweise in [Bur32] betrachtet (siehe aber auch [MY13, chapter 15]). Es stellt sich heraus, dass man die Klasse eines quadratischen Polynoms P durch nur zwei Invarianten beschreiben kann: Durch die Trägheit der Matrix A_P und durch die Trägheit der links oberen 3×3-Teilmatrix $A_{P,\mathrm{u}}$ von A_P. Dies ist sehr gut in [MY13, chapter 15] erklärt.

5 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
ClassifyAffineRealQuadraticSurface(P::RngMPolElt[FldRat]) ,
```

die den Typ und einige Invarianten der zu einem rationalen quadratischen Polynom P zugehörige quadratischen Fläche ausgibt. Dies soll wie in [MY13, chapter 15, §1] beschrieben über die Trägheiten erfolgen und die dort in Tabelle 1 aufgelistete Klassifikation verwenden. Es sollen dabei alle Daten dieser Tabelle und ebenfalls die Invariante k (siehe [MY13, chapter 15, §1]) ausgegeben werden. Unten ist eine Beispielausgabe. Sie dürfen auch gerne noch mehr Informationen berechnen und ausgeben lassen.

6 Beispiel.

```
> ClassifyAffineRealQuadraticSurface(X^2-Y^2-2*X+X*Y+Z);
Polynomial:
    X^2 + X*Y - 2*X - Y^2 + Z
Matrix, upper matrix:
```

```
    [   1 1/2    0   -1]
    [1/2   -1    0    0]
    [   0    0    0 1/2]
    [  -1    0 1/2    0],

    [   1 1/2    0]
    [1/2   -1    0]
    [   0    0    0]
Inertia, upper inertia:
    <2, 2>, <1, 1>
Determinant, upper determinant:
    5/16, 0
Rank, upper rank:
    4, 2
k:
    0
Singularity:
    Nonsingular.
Type:
    Hyperbolic paraboloid.
Real components:
    Yes.
Proper:
    Yes.
```

7 Aufgabe. Klassifizieren Sie folgende quadratische Flächen:

(a) $X^2 + Y^2 - 2X + XY + YZ = 0$.

(b) $X^2 + Y^2 - 2X + XY = 1$.

Literatur

[Bur32] Richard S. Burington. *A classification of quadrics in affine n-space by means of arithmetic invariants*. In: 39.9 (1932), S. 527–532.

[MY13] Kurt Mehlhorn und Chee Yap. *Robust Geometric Computation*. Draft. 2013. URL: http://cs.nyu.edu/yap/book/egc/.