Computerpraktikum Polyvalenz Ulrich Thiel
SS 2013

Projekt 1.7: Schur-Polynome und Littlewood–Richardson Koeffizienten

Anforderungen:

(a) Bearbeiten Sie <u>alle</u> in dem Text gestellten Aufgaben.

(b) Reichen Sie die implementierten Intrinsics ausführlich dokumentiert in <u>einer</u> Datei ein.

(c) Schreiben Sie einen Text, in dem Sie die Aufgabenstellung kurz in eigenen Worten zusammenfassen, und Ihre Ideen, Ansätze und Ergebnisse erläutern.

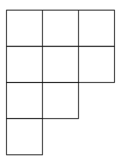
(d) Bereiten Sie einen Vortrag (15-20 Minuten) darüber vor.

(e) Sind Ergebnisse zu den Aufgaben bereits in der Literatur diskutiert (und das sind sie meistens), möchte ich keine Referenz auf diese Literatur als Lösung bekommen, sondern funktionsfähige Algorithmen (bzw. Beweise), die diese Lösungen ergeben.

(f) Sie dürfen alle in Magma bereits implementierten Intrinsics benutzen, es sei denn, es ist ausdrücklich untersagt.

1 Definition. Eine *Partition* einer positiven natürlichen Zahl n ist eine abfallende Folge $\lambda := (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ natürlicher Zahlen, sodass $n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$. In diesem Fall schreibt man auch $\lambda \vdash n$ und $|\lambda| := n$. Die Nullen in λ schreibt man häufig nicht. Wir nennen das minimale l mit $\lambda_l > 0$ und $\lambda_{l+1} = 0$ die *Länge* von λ und bezeichnen dies mit $\ell(\lambda)$. Die Menge der Partitionen von n bezeichnen wir mit Λ_n und die Menge der Partitionen von n der Länge l bezeichnen wir mit $\Lambda_{n,l}$. Das *Young-Diagramm* (oder auch die *Form*) von λ ist eine „Matrix“ aus n Kästchen mit $\ell(\lambda)$ linksbündigen Zeilen, wobei die i-te Zeile genau λ_i Kästchen enthält.

2 Beispiel. Die Form der Partition $(3,3,2,1) \vdash 9$ ist



3 Definition. Sei $\lambda \in \Lambda_n$. Ein *Young-Tableau von der Form* λ (oder ein λ-*Tableau*) ist das Young-Diagram von λ zusammen mit einer festen Zuordnung positiver natürlicher Zahlen in dessen Kästchen. Für festes λ bezeichnen wir die Menge aller λ-Tableaux mit Einträgen aus $[1,r]$ mit $\mathscr{T}(\lambda,r)$ und setzen $\mathscr{T}(\lambda) := \mathscr{T}(\lambda,n)$.

4 Beispiel. Für $\lambda := (4,2,1) \vdash 7$ sind zum Beispiel

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&1&1&4\\\hline 6&2\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&9&1&6\\\hline 8&1\\\cline{1-2} 1\\\cline{1-1}\end{array}$$

λ-Tableaux.

5 Definition. Ein Young-Tableau heißt *standard*, falls die Einträge in jeder Zeile und Spalte streng monoton steigend sind. Wir bezeichnen mit $\mathscr{T}_{\mathrm{s}}(\lambda, r)$ die Menge aller standard λ-Tableau mit Einträgen aus $[1, r]$ und setzen $\mathscr{T}_{\mathrm{s}}(\lambda) := \mathscr{T}_{\mathrm{s}}(\lambda, n)$.

6 Bemerkung. In einem standard λ-Tableau mit Einträgen in $[1, n]$ tritt jede Zahl zwischen 1 und n genau einmal auf.

7 Definition. Ein Young-Tableau heißt *semi-standard*, falls die Einträge in jeder Zeile monoton steigend und in jeder Spalte streng monoton steigend sind.[1] Wir bezeichnen mit $\mathscr{T}_{\mathrm{ss}}(\lambda, r)$ die Menge aller semi-standard λ-Tableau mit Einträgen aus $[1, r]$ und setzen $\mathscr{T}_{\mathrm{ss}}(\lambda) := \mathscr{T}_{\mathrm{ss}}(\lambda, n)$.

8 Definition. Sei R ein kommutativer Ring, sei $P := R[\boldsymbol{X}]$ der Polynomring über R in den Variablen $\boldsymbol{X} := (X_i)_{i=1}^r$, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\lambda \in \Lambda_n$. Für ein $T \in \mathscr{T}(\lambda, r)$ definieren wir

$$\boldsymbol{X}^T := \prod_{i \in T} X_i \in R[\boldsymbol{X}] \ .$$

Für $\lambda \in \Lambda_n$ heißt das Polynom

$$s_\lambda := s_{\lambda,P} := \sum_{T \in \mathscr{T}_{\mathrm{ss}}(\lambda, r)} \boldsymbol{X}^T \in R[\boldsymbol{X}]$$

das *Schur-Polynom* zu λ (in P).

9 Aufgabe. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \Lambda_n$ mit $\ell(\lambda) > r$, so ist $s_\lambda = 0$.

(b) Ist $\lambda \in \Lambda_n$ mit $\ell(\lambda) \leq r$, so ist s_λ homogen vom Grad n.

10 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
SchurPolynomial(P::RngMPol, lambda::SeqEnum) -> RngMPolElt ,
```

die für eine Partition λ das Schur-Polynom $s_{\lambda,P}$ zurückgibt.

Hinweis: Es gibt bereits eine Intrinsic `TableauxOfShape`, die Sie verwenden dürfen.

11 Fakt. Für jeden kommutativen Ring R bilden für festes n die Schur-Polynome $(s_\lambda)_{\lambda \vdash n, \ell(\lambda) \leq r}$ eine R-Basis des Raums $R[\boldsymbol{X}]_n^{\mathrm{S}_r}$ der homogenen symmetrischen Polynome vom Grad n, d.h. der homogenen Polynome vom Grad n, die invariant unter Variablenpermutationen sind.

[1] Tableaux in Magma sind per Definition immer semi-standard.

Da das Produkt symmetrischer Funktionen wieder symmetrisch ist, ist insbesondere für $\lambda \in \Lambda_n$ und $s_\mu \in \Lambda_m$ das Produkt $s_\lambda s_\mu$ in $R[\boldsymbol{X}]^{S_r}_{n+m}$ enthalten und daher eine Summe von Schur-Polynomen:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\substack{\nu \vdash n+m \\ \ell(\nu) \leq r}} c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu \ .$$

Die Koeffizienten $c^\nu_{\lambda,\mu} \in R[\boldsymbol{X}]$ heißen *Littlewood–Richardson Koeffizienten*. ■

12 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
LittlewoodRichardsonCoefficients(P::RngMPol, lambda::SeqEnum,
                    mu::SeqEnum) -> SetEnum ,
```

die die (nicht-verschwindenden) Littlewood–Richardson Koeffizienten $c^\nu_{\lambda,\mu}$ in $P = \mathbb{Q}[\boldsymbol{X}]$ zurückgibt. Dafür dürfen Sie jedoch nicht die Littlewood–Richardson Regeln – eine kombinatorische Beschreibung dieser Koeffizienten – verwenden! Was fällt Ihnen an den Koeffizienten auf? Äußern Sie eine Vermutung.