Computerpraktikum Polyvalenz Ulrich Thiel
SS 2013

Projekt 1.8: Zentrale Erweiterungen der symmetrischen und alternierenden Gruppen

Anforderungen:

(a) Bearbeiten Sie alle in dem Text gestellten Aufgaben.

(b) Reichen Sie die implementierten Intrinsics ausführlich dokumentiert in einer Datei ein.

(c) Schreiben Sie einen Text, in dem Sie die Aufgabenstellung kurz in eigenen Worten zusammenfassen, und Ihre Ideen, Ansätze und Ergebnisse erläutern.

(d) Bereiten Sie einen Vortrag (15-20 Minuten) darüber vor.

(e) Sind Ergebnisse zu den Aufgaben bereits in der Literatur diskutiert (und das sind sie meistens), möchte ich keine Referenz auf diese Literatur als Lösung bekommen, sondern funktionsfähige Algorithmen (bzw. Beweise), die diese Lösungen ergeben.

(f) Sie dürfen alle in Magma bereits implementierten Intrinsics benutzen, es sei denn, es ist ausdrücklich untersagt.

1 Definition. Eine zentrale Erweiterung einer Gruppe G ist ein surjektiver Morphismus $q : E \twoheadrightarrow G$ mit $\mathrm{Ker}(q) \subseteq \mathrm{Z}(E)$. Zwei zentrale Erweiterungen $q : E \to G$ und $q' : E' \to G$ heißen *isomorph*, falls es einen Isomorphismus $\varphi : E \to E'$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & E' \arrow[dl, two heads, "q'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

2 Aufgabe. Zeigen Sie, dass sich ein Isomorphismus φ zentraler Erweiterungen $q : E \twoheadrightarrow G$ und $q' : E' \twoheadrightarrow G$ zu einem Isomorphismus $\mathrm{Ker}(q) \cong \mathrm{Ker}(q')$ einschränkt.

3 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
IsCentralExtension(q::HomGrp) -> BoolElt, RngIntElt ,
```

die überprüft, ob ein Gruppenmorphismus q eine zentrale Erweiterung ist, und falls ja, auch die Ordnung des Kerns von q zurückgibt.

4 Definition. Die *Kommutator-Untergruppe* $[G, G]$ einer Gruppe G ist die durch die Menge $\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$ erzeugte Untergruppe in G.

5 Definition. Eine *Stammerweiterung* (auch *Schur-Erweiterung*) einer Gruppe G ist eine zentrale Erweiterung $q : E \twoheadrightarrow G$ mit $\mathrm{Ker}(q) \subseteq \mathrm{Z}(E) \cap [E, E]$. In diesem Fall nennt man E auch eine *n-fache Überdeckung* von G, wobei $n = \#\mathrm{Ker}(q)$.

6 Aufgabe. Zeigen Sie, dass jede zu einer Stammerweiterung isomorphe zentrale Erweiterung ebenfalls eine Stammerweiterung ist.

7 Fakt. Zu jeder endlichen Gruppe G gibt es eine (endliche) Stammerweiterung maximaler Ordnung. Jede dieser maximalen Stammerweiterungen nennt man auch *Schur-Überdeckung* von G. Obwohl die Schur-Überdeckungen nicht isomorph sein müssen, sind es ihre Kerne. Die Isomorphieklasse dieser Kerne wird der *Schur-Multiplikator* von G genannt. Ist G hingegen perfekt, d.h. $G = [G, G]$, so gibt es bis auf Isomorphie genau eine Schur-Überdeckung. ■

8 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
IsStemExtension(q::HomGrp) -> BoolElt, RngIntElt ,
```

die überprüft, ob ein Gruppenmorphismus q eine Stammerweiterung ist, und falls ja, auch die Ordnung des Kerns von q zurückgibt.

9 Fakt. Für jedes $n \geq 4$ besitzt die symmetrische Gruppe S_n zwei nicht-isomorphe 2-fache Überdeckungen, die gewöhnlich mit $2 \cdot \mathrm{S}_n^{\pm}$ bezeichnet werden. Beides sind Schur-Überdeckungen, sodass der Schur-Multiplikator von S_n also $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. ■

10 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
SymmetricGroupDoubleCover(n::RngIntElt, Type::MonStgELt) -> GrpFP, HomGrp ,
```

die für $n \geq 4$ die 2-fache Überdeckung $2 \cdot \mathrm{S}_n^{\pm}$ von S_n, realisiert wie in [Wik13a] beschrieben, inklusive des Überdeckungsmorphismus zurückgibt. Überprüfen Sie die Korrektheit für alle $4 \leq n \leq 8$ mittels `IsStemExtension`. Überprüfen Sie weiterhin mit Magma für alle $4 \leq n \leq 8$, dass $2 \cdot \mathrm{S}_n^{+}$ und $2 \cdot \mathrm{S}_n^{-}$ nicht isomorph sind.

11 Fakt. Für jedes $n \geq 4$ besitzt die alternierende Gruppe A_n bis auf Isomorphie genau eine 2-fache Überdeckung, die mit $2 \cdot \mathrm{A}_n$ bezeichnet wird. ■

12. Wie in [Wil09, 2.7.1] beschrieben, besitzt $2 \cdot \mathrm{S}_n^{\pm}$ genau eine Untergruppe $2 \cdot \mathrm{A}_n^{\pm}$ vom Index 2 und die Einschränkung des Morphismus $2 \cdot \mathrm{S}_n^{\pm} \twoheadrightarrow \mathrm{S}_n$ darauf ergibt die 2-fache Überdeckung $2 \cdot \mathrm{A}_n^{\pm} \twoheadrightarrow \mathrm{A}_n$. Nach 11 sind $\mathrm{A}_n^{\pm}$ isomorph, die unterschiedliche Bezeichnung haben wir hier nur wegen der Konstruktion innerhalb $2 \cdot \mathrm{S}_n^{\pm}$ gewählt.

13 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
AlternatingGroupDoubleCover(n::RngIntElt, Type::MonStgELt) -> GrpFP, HomGrp ,
```

die für $n \geq 4$ die 2-fache Überdeckung $2 \cdot \mathrm{A}_n^{\pm}$ von A_n wie in 12 beschrieben zurückgibt.

14 Fakt. Für $n \geq 4$ und $n \neq 6,7$ ist der Schur-Multiplikator von A_n gleich $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass $2 \cdot \mathrm{A}_n$ in der Tat eine (die) Schur-Überdeckung von A_n ist. Für $n = 6,7$ gibt es jedoch *exzeptionelle* Stammerweiterungen von A_n höheren Grades. Sowohl A_6 als auch A_7 besitzen bis auf Isomorphie genau eine 3-fache Überdeckung (bezeichnet mit $3 \cdot \mathrm{A}_6$ bzw. $3 \cdot \mathrm{A}_7$) und eine 6-fache Überdeckung (bezeichnet mit $6 \cdot \mathrm{A}_6$ bzw. $6 \cdot \mathrm{A}_7$), wobei die 6-fachen Überdeckungen die Schur-Überdeckungen sind, sodass der Schur-Multiplikator von A_6 und A_7 gleich $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist. ■

15. Die 3-fache Überdeckung $3 \cdot \mathrm{A}_6$ wird auch die *Valentiner-Gruppe* genannt und sie besitzt ganz verschiedenartige Realisierungen (siehe zum Beispiel [Wik13b]). Eine Konstruktion ist auch in [Wil09, 2.7.3] beschrieben.

16 Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
AlternatingGroupTripleCover(n::RngIntElt) -> Grp, HomGrp ,
```

die für $n = 6$ die 3-fache Überdeckung $3 \cdot \mathrm{A}_n$ von A_n auf irgendeine Art, aber *inklusive* des Überdeckungsmorphismus, zurückgibt.

Zusatzaufgabe 1: Implementieren Sie verschiedene Realisierungen von $3 \cdot \mathrm{A}_6$ und $3 \cdot \mathrm{A}_7$.

Zusatzaufgabe 2: Implementieren Sie (verschiedene Realisierungen von) $6 \cdot \mathrm{A}_6$ und $6 \cdot \mathrm{A}_7$.

Literatur

[Wik13a] Groupprops – The Group Properties Wiki. *Double cover of symmetric group*. [Online; accessed 07-May- 2013]. 2013. URL: http://groupprops.subwiki.org/wiki/Double_cover_of_symmetric_group.

[Wik13b] Wikipedia. *Valentiner group*. [Online; accessed 07-May- 2013]. 2013. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Valentiner_group.

[Wil09] Robert A. Wilson. *The finite simple groups*. Bd. 251. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2009.