Computerpraktikum Polyvalenz Ulrich Thiel
SS 2014

Euler-Charakteristik von Brown-Komplexen

Anforderungen:

(a) **Bearbeiten Sie alle in dem Text gestellten Aufgaben.**

(b) **Reichen Sie die implementierten Intrinsics ausführlich dokumentiert in einer Datei ein.**

(c) **Schreiben Sie einen Text, in dem Sie die Aufgabenstellung kurz in eigenen Worten zusammenfassen, und Ihre Ideen, Ansätze und Ergebnisse erläutern.**

(d) **Bereiten Sie einen Vortrag (15-20 Minuten) darüber vor.**

(e) **Sind Ergebnisse zu den Aufgaben bereits in der Literatur diskutiert (und das sind sie meistens), möchte ich keine Referenz auf diese Literatur als Lösung bekommen, sondern funktionsfähige Algorithmen (bzw. Beweise), die diese Lösungen ergeben.**

(f) **Sie dürfen alle in MAGMA bereits implementierten Intrinsics benutzen, es sei denn, es ist ausdrücklich untersagt. Für dieses Projekt dürfen keine bereits existierenden Intrinsics zu Simplizialkomplexen in MAGMA verwendet werden.**

1. Will man eine Fläche X im Raum (oder allgemeiner einen topologischen Raum X) besser verstehen, so bietet es sich an, eine *Triangulierung* von X zu betrachten, was im Prinzip heißt, dass man versucht, X mit Dreiecken (oder deren höherdimensionalen Analoga, den n-Simplizes) zu überdecken. Dabei sollte man aber keine Simplizes übereinander legen oder sich schneiden lassen. So ein Arrangement von Simplizes wird auch *Simplizialkomplex* genannt.

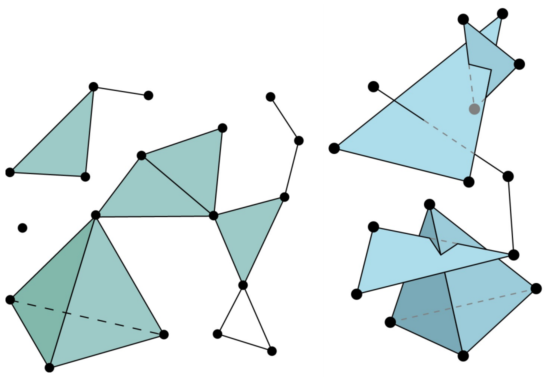

ABBILDUNG 1. Links: Ein Simplizialkomplex, Rechts: Kein Simplizialkomplex. Quelle: Wikipedia.

2. Vollkommen die Topologie ignorierend kann man die charakteristischen Eigenschaften eines Simplizialkomplexes zu folgendem Begriff abstrahieren.

3. Definition. Ein *abstrakter Simplizialkomplex* ist ein Paar $\Delta := (S, \Delta)$ bestehend aus einer Menge S und einer Menge Δ endlicher Teilmengen von S, sodass gilt: Ist $X \in \Delta$ und $Y \subseteq X$, so ist auch $Y \in \Delta$.

Die Elemente von Δ werden *Seiten* genannt und man sagt, dass eine Seite Y zu einer anderen Seite X *gehört*, falls $Y \subseteq X$. Die *Eckenmenge* von Δ ist $\mathrm{V}(\Delta) := \cup_{X \in \Delta} X \subseteq S$. Die Elemente von $\mathrm{V}(\Delta)$ heißen *Ecken*. Die maximalen Seiten von Δ, also diejenigen, die nicht echt enthalten in einer anderen Seite sind, nennt man *Facetten* von Δ. Die *Dimension* einer Seite X von Δ ist definiert als $\dim(X) := \#X - 1$. Die *Dimension* von Δ ist $\dim(\Delta) := \sup_{X\in\Delta} \dim(X)$.

4. Bemerkung. Beachten Sie, dass ein abstrakter Simplizialkomplex $\Delta := (S, \Delta)$ bereits eindeutig durch seine Facetten bestimmt ist. Das verwenden wir unten und das sollten Sie auch für Ihre Implementierungen verwenden, weil man so weniger Daten zur Definition eines abstrakten Simplizialkomplexes abspeichern muss.

5. Aufgabe. Fassen Sie den Simplizialkomplex in Abbildung 1 (also das linke Arrangement) als abstrakten Simplizialkomplex auf.

6. Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
IsSimplicialComplex(Delta::SetEnum) -> BoolElt ,
```

die prüft, ob eine Menge Δ ein abstrakter Simplizialkomplex ist (sie müssen dabei gar nicht die Grundmenge S übergeben).

7. Definition. Die *Euler-Charakteristik* eines abstrakten Simplizialkomplexes $\Delta := (S, \Delta)$ ist definiert als

$$\chi(\Delta) := \sum_{\substack{X\in\Delta \\ X\neq\emptyset}} (-1)^{\dim X} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i f_i \ ,$$

wobei f_i die Anzahl der i-dimensionalen Seiten von X ist.[1]

8. Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
EulerCharacteristic(Delta::SetEnum) -> RngIntElt ,
```

die die Euler-Charakteristik eines abstrakten Simplizialkomplexes Δ berechnet. Die Grundmenge S von Δ müssen wir dabei gar nicht übergeben. Erlauben Sie auch, dass Δ nicht notwendig ein abstrakter Simplizialkomplex ist, sondern dass Δ einfach eine Menge ist, denn dies definiert bereits einen eindeutigen Simplizialkomplex dessen Facetten genau die Mengen in Δ sind.

9. Aufgabe. Berechnen Sie die Euler-Charakteristik des Simplizialkomplexes in Abbildung 1.

10. Der Vorteil des Konzeptes eines abstrakten Simplizialkomplexes ist, dass es eine rein kombinatorische Struktur ist, die a priori nichts mit Geometrie zu tun hat. Dies öffnet vollkommen neue Anwendungsgebiete ursprünglich rein geometrischer Konzepte.

11. Definition. Sei $A := (A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann ist $\mathscr{O}(A) := (\mathscr{P}(A), \mathscr{C}(A))$, wobei $\mathscr{P}(A)$ die Potenzmenge von A ist und $\mathscr{C}(A)$ die Menge aller *Ketten* in A ist, d.h. aller Mengen $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ mit

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \ ,$$

ein abstrakter Simplizialkomplex. Man nennt $\mathscr{O}(A)$ den *Ordnungs-Komplex* von A. Wir setzen $\chi(A) := \chi(\mathscr{O}(A))$.

12. Aufgabe. Zeigen Sie, dass $\mathscr{O}(A)$ in der Tat ein abstrakter Simplizialkomplex ist.

13. Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
OrderComplex(A::SetEnum, lessequal::Intrinsic) -> SetEnum ,
```

die die Facetten des Ordnungskomplexes $\mathscr{O}(A)$ von A bezüglich einer durch lessequal definierten partiellen Ordnung auf A zurückgibt.

[1] Häufig wird auch die *reduzierte* Euler-Charakteristik $\widetilde{\chi}(\Delta)$ betrachtet, bei der noch die leere Seite $\emptyset$ von Δ hinzugenommen wird. Es gilt also $\widetilde{\chi}(\Delta) = \chi(\Delta) - 1$.

14. Definition. Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Sei $\mathscr{S}_p(G)$ die Menge aller nicht-trivialen p-Untergruppen von G. Dann wird der abstrakte Simplizialkomplex $\mathscr{B}_p(G) := \mathscr{O}(\mathscr{S}_p(G))$ der *Brown p-Komplex* von G genannt.

15. Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic

```
BrownComplex(G::Grp, p::RngIntElt) -> SetEnum ,
```

die die Facetten des Brown p-Komplexes von G zurückgibt.

16. Aufgabe. Bestimmen Sie die Dimension und die Euler-Charakteristik von $\mathscr{B}_p(\mathrm{S}_n)$ und $\mathscr{B}_p(\mathrm{A}_n)$ für alle $n \leq 7$ und alle Primzahlen p.

17. Aufgabe. Untersuchen Sie den Rest von $\chi(\mathscr{B}_p(G))$ modulo $|G|_p$ für möglichst viele Gruppen G und Primzahlen p und äußern Sie eine allgemeine Vermutung. Hierbei ist $|G|_p$ der p-Anteil der Gruppenordnung von G.