Computerpraktikum Polyvalenz Ulrich Thiel
SS 2014

Bruhat-Zellen in $\mathrm{GL}_n(K)$

Anforderungen:
- **(a) Bearbeiten Sie alle in dem Text gestellten Aufgaben.**
- **(b) Reichen Sie die implementierten Intrinsics ausführlich dokumentiert in einer Datei ein.**
- **(c) Schreiben Sie einen Text, in dem Sie die Aufgabenstellung kurz in eigenen Worten zusammenfassen, und Ihre Ideen, Ansätze und Ergebnisse erläutern.**
- **(d) Bereiten Sie einen Vortrag (15-20 Minuten) darüber vor.**
- **(e) Sind Ergebnisse zu den Aufgaben bereits in der Literatur diskutiert (und das sind sie meistens), möchte ich keine Referenz auf diese Literatur als Lösung bekommen, sondern funktionsfähige Algorithmen (bzw. Beweise), die diese Lösungen ergeben.**
- **(f) Sie dürfen alle in MAGMA bereits implementierten Intrinsics benutzen, es sei denn, es ist ausdrücklich untersagt. In diesem Projekt dürfen keine Intrinsics zu algebraischen Gruppen und endlichen Gruppen vom Lie-Typ verwendet werden.**

"Eine algebraische Gruppe oder eine endliche Gruppe vom Lie-Typ (allgemeiner jede Gruppe mit Tits-System) lässt sich disjunkt in ihre Bruhat-Zellen, parametrisiert durch ihre Weyl-Gruppe, zerlegen." Dieser Fakt ist ein wichtiges Werkzeug für das Studium dieser Gruppen. In diesem Projekt wollen wir dies am Beispiel der allgemeinen linearen Gruppe betrachten.

1. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei $\mathrm{B}_n(K)$ die Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ bestehend aus den oberen Dreiecksmatrizen. Dies ist die sogenannte *Borel-Untergruppe* von $\mathrm{GL}_n(K)$. Sei weiterhin $\mathrm{P}_n(K)$ die Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ bestehend aus den *Permutationsmatrizen*, d.h. den Matrizen, die in jeder Spalte und jeder Zeile genau einen Eintrag ungleich Null haben und dieser ist dann gleich 1. Man kann $\mathrm{P}_n(K)$ auch die *Weyl-Gruppe* von $\mathrm{GL}_n(K)$ nennen.

2. Aufgabe. Begründen Sie, warum $\mathrm{B}_n(K)$ und $\mathrm{P}_n(K)$ Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(K)$ sind. Zeigen Sie weiterhin, dass es einen kanonischen Isomorphismus zwischen $\mathrm{P}_n(K)$ und der symmetrischen Gruppe S_n gibt.

3. Der Satz über die *Bruhat-Zerlegung* von $\mathrm{GL}_n(K)$ besagt, dass

$$\mathrm{GL}_n(K) = \coprod_{w \in \mathrm{P}_n(K)} \mathrm{B}_n(K) w \mathrm{B}_n(K)$$

gilt. Man nennt $\mathscr{C}(w) := \mathrm{B}_n(K) w \mathrm{B}_n(K)$ die *Bruhat-Zelle* zu w in $\mathrm{GL}_n(K)$. In anderen Worten gilt: Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ liegt in *genau einer* Bruhat-Zelle; oder noch deutlicher: Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt es *genau ein* $w \in \mathrm{P}_n(K)$, sodass $A = B_1 \cdot w \cdot B_2$ für gewisse (aber nicht eindeutige) $B_1, B_2 \in \mathrm{B}_n(K)$ gilt.

Ein Beweis dieser Aussage ist zum Beispiel in [1, S. 31] zu finden. Der Beweis ist konstruktiv, sodass man daraus einen Algorithmus ableiten kann. Das Ziel des Projekts ist also folgende Aufgabe.

4. Aufgabe. Implementieren Sie eine Intrinsic `BruhatCell(G::AlgMatElt) -> GrpPermElt`, die für eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Permutation $w \in \mathrm{S}_n$ mit $A \in \mathscr{C}(w)$ bestimmt.

Zusatzaufgabe. Implementieren Sie Algorithmen, die die Bruhat-Zellen für Elemente von Gruppen anderen Lie-Typs bestimmen, z.B. für die symplektischen oder orthogonalen Gruppen.

Literatur

[1] Eddie Nijholt. *Bruhat cells and double Bruhat cells for* GL_n. 2011. URL: `http://www.science.uva.nl/onderwijs/thesis/centraal/files/f1399576347.pdf`.