Computerpraktikum Polyvalenz Ulrich Thiel
SS 2014

Kommutatoren in endlichen Gruppen

Anforderungen:

(a) Bearbeiten Sie alle in dem Text gestellten Aufgaben.
(b) Reichen Sie die implementierten Intrinsics ausführlich dokumentiert in einer Datei ein.
(c) Schreiben Sie einen Text, in dem Sie die Aufgabenstellung kurz in eigenen Worten zusammenfassen, und Ihre Ideen, Ansätze und Ergebnisse erläutern.
(d) Bereiten Sie einen Vortrag (15-20 Minuten) darüber vor.
(e) Sind Ergebnisse zu den Aufgaben bereits in der Literatur diskutiert (und das sind sie meistens), möchte ich keine Referenz auf diese Literatur als Lösung bekommen, sondern funktionsfähige Algorithmen (bzw. Beweise), die diese Lösungen ergeben.
(f) Sie dürfen alle in MAGMA bereits implementierten Intrinsics benutzen, es sei denn, es ist ausdrücklich untersagt.

1. Definition. Eine Gruppe G heißt *einfach*, falls sie nicht-trivial ist und keine nicht-trivialen Normalteiler besitzt (also keine außer 1 und G).

2. Die endlichen einfachen Gruppen kann man sich als elementare Bausteine aller endlichen Gruppen vorstellen. Ist G nämlich nicht einfach, so gibt es nach Definition einen nicht-trivialen Normalteiler N in G. Man erhält so eine Subnormalreihe $1 \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ und induktiv bekommt man so eine Subnormalreihe in G mit einfachen Quotienten.

Aus diesem Grund ist es wichtig, einfache Gruppen zu verstehen. Diese Gruppen wurden mit einem großen Aufwand (über 100 Autoren und Artikel mit einem Gesamtumfang von mehr als 10,000 Seiten, siehe [2]) klassifiziert. Der Beweis wurde erst 2005 durch das Füllen einiger Lücken abgeschlossen und befindet sich aktuell in einer Revisionsphase. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass eine endliche einfache Gruppe genau zu einer der folgenden Familien gehört (siehe auch [3] für mehr Details):

(a) Zyklische Gruppen von Primzahlgrad.
(b) Alternierende Gruppen A_n mit $n \geq 5$.
(c) 16 unendliche Familien sogenannter *Gruppen vom Lie-Typ*.
(d) 26 sogenannte *sporadische* Gruppen.

Im folgenden wollen wir eine Frage über endliche einfache Gruppen untersuchen. Dazu wiederholen wir zunächst einige elementare Begriffe.

3. Definition. Sei G eine Gruppe. Der *Kommutator* zweier Elemente $g, h \in G$ ist definiert als $[g,h] := g^{-1}h^{-1}gh$.[1] Die *Kommutatoruntergruppe* $[G,G]$ von G ist die durch alle Kommutatoren in G erzeugte Untergruppe. Man nennt G *perfekt*, falls $G = [G,G]$.

4. Der Kommutator $[g,h]$ ist genau dann trivial, wenn g und h kommutieren, d.h. $gh = hg$. Insbesondere ist G abelsch genau dann, wenn $[G,G]$ trivial ist. Anschaulich misst die Größe der Kommutatoruntergruppe von G also, wie weit G davon entfernt ist, abelsch zu sein: Je größer $[G,G]$, desto „weniger abelsch" ist G.

[1] Je nach Literatur ist auch $[g,h] = ghgh^{-1}$ definiert, das macht aber für unsere Betrachtungen keinen Unterschied.

Da aber $[G, G]$ nur die durch alle Kommutatoren *erzeugte* Untergruppe ist, kann eine Gruppe sogar noch „weniger abelsch“ sein, als wenn sie einfach nur perfekt ist, nämlich dann, wenn bereits die Menge aller Kommutatoren in G gleich G ist, d.h. wenn jedes Element von G ein Kommutator ist.

5. Da die Kommutatoruntergruppe einer Gruppe ein Normalteiler ist, ist eine nicht-abelsche einfache Gruppe automatisch schon perfekt. Dies führt uns zu folgender Frage:

> „Ist jedes Element einer nicht-abelschen einfachen Gruppe bereits ein Kommutator?“

6. Aufgabe. Untersuchen Sie mit MAGMA die Frage in 5 für alle nicht-abelschen einfachen Gruppen bis mindestens zur Ordnung 15,000,000. Fassen Sie Ihre Ergebnisse ausführlich zusammen, leiten Sie an Ihren Beobachtungen möglichst viele Vermutungen ab und begründen Sie diese. Alle Algorithmen, die Sie dafür implementieren, sollen dabei möglichst effizient und begründet sein!

Hinweis 1: Die nicht-abelschen einfachen Gruppen bis zur Ordnung 1,000,000,000 sind zum Beispiel in [1] aufgelistet. Beachten Sie aber die Tabellenbeschreibungen!

Hinweis 2: Realisierungen einiger sporadischer Gruppen in MAGMA finden Sie in der Bibliothek von MAGMA im Verzeichnis `/opt/magma/libs/pergps`.

Hinweis 3: Überlegen Sie sich genau, wie Sie die Fragestellung algorithmisch untersuchen, denn ein zu naiver Ansatz wird bei Gruppen dieser Größe wahrscheinlich nicht vor dem Abgabetermin zu Ergebnissen führen.

Wir wollen die Frage in 5 auf eine größere Klasse von Gruppen ausweiten.

7. Definition. Eine endliche Gruppe G heißt *quasi-einfach*, falls G perfekt ist und $G/\mathrm{Z}(G)$ einfach ist.

8. Nicht-abelsche einfache Gruppen sind offensichtlich quasi-einfach, sodass die Frage

> „Ist jedes Element einer quasi-einfachen Gruppe bereits ein Kommutator?“

die Frage in 5 verallgemeinert.

9. Aufgabe. Untersuchen Sie die Frage in 8 für alle quasi-einfachen Gruppen mit Ordnung bis zu 50,000. Fassen Sie wieder Ihre Ergebnisse ausführlich zusammen, leiten Sie an Ihren Beobachtungen möglichst viele Vermutungen ab und begründen Sie diese.

Hinweis: MAGMA enthält eine Datenbank mit perfekten Gruppen bis Ordnung 50,000.

Literatur

[1] Craig Cato. *The orders of the known simple groups as far as one trillion*. In: *Math. Comp.* 31.138 (1977), S. 574–577. DOI: `http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1977-0430052-X`.

[2] Wikipedia. *Classification of finite simple groups*. [Online; accessed 06-May-2013]. 2013. URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/Classification_of_finite_simple_groups`.

[3] Wikipedia. *List of finite simple groups*. [Online; accessed 06-May-2013]. 2013. URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_simple_groups`.