Aufgabe 12. Bestimme die 2-Blöcke und 2-modularen Zerlegungsmatrizen von S_4 und A_4.

Die Charaktertafel von $\mathbb{C}\mathrm{S}_4$ ist:

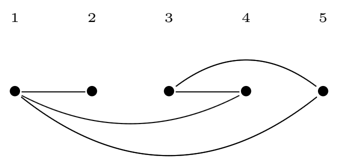
	(1)	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)$
	$1a$	$2a$	$3a$	$4a$	$2b$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	.	.
χ_4	3	-1	.	1	-1
χ_5	3	-1	.	-1	1

Wir bestimmen nun die Brauer-Charaktertafel für $p = 2$. Die Anzahl der p'-Konjugiertenklassen ist gleich 2, d.h. es gibt zwei irreduzible Brauer-Charaktere von S_4. Einer davon ist der triviale $\beta_1 := \chi_1^\circ = \chi_2^\circ$. Sei β_2 der andere. Es ist $\chi_3^\circ = a\beta_1 + b\beta_2$ für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $b = 0$ nicht möglich. Also kann nur $(a, b) \in \{(1,1), (0,2), (0,1)\}$ sein. In den ersten beiden Fällen wäre β_2 linear und $\beta_2((1,2,3)) \in \{-2, -\frac{1}{2}\}$. Das ist aber nicht möglich, da die Werte eines linearen Brauer-Charakters Einheitswurzeln sind. Also ist $\chi_3^\circ = \beta_2$.[1] Weiterhin ist $\chi_4^\circ = \chi_5^\circ = \chi_1^\circ + \chi_3^\circ$. Damit haben wir auch schon die Brauer-Charaktertafel und die Zerlegungsmatrix in diesem Fall bestimmt:

	(1)	$(1,2,3)$
β_1	1	1
β_2	2	-1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den Brauer-Graphen erhalten wir daraus auch sofort:



Es folgt insbesondere, dass S_4 genau einen 2-Block hat. Der Defekt dieses Blocks ist gleich 3.

Die Charaktertafel von $\mathbb{C}\mathrm{A}_4$ ist (ζ bezeichne eine primitive dritte Einheitswurzel):

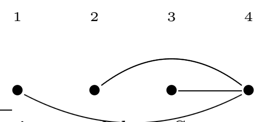
	(1)	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3)$	$(1,2,4)$
	$1a$	$2a$	$3a$	$3b$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ	$\overline{\zeta}$
χ_3	1	1	$\overline{\zeta}$	ζ
χ_4	3	-1	.	.

Wir bestimmen nun die Brauer-Charaktertafel für $p = 2$. Die Anzahl der p'-Konjugiertenklassen ist gleich 3, d.h. es gibt drei irreduzible Brauer-Charaktere von A_4. Einer davon ist $\beta_1 := \chi_1^\circ$. Es ist $\chi_4^\circ = \chi_1^\circ + \chi_2^\circ + \chi_3^\circ$, d.h. die Reduktion von χ_4 ist reduzibel. Folglich sind $\beta_2 := \chi_2^\circ$ und $\beta_3 := \chi_3^\circ$ die beiden anderen irreduziblen Brauer-Charaktere. Die Brauer-Charaktertafel und Zerlegungsmatrix sind:

	(1)	$(1,2,3)$	$(1,2,4)$
β_1	1	1	1
β_2	1	ζ	$\overline{\zeta}$
β_3	1	$\overline{\zeta}$	ζ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den Brauer-Graphen erhalten wir daraus auch sofort:



[1] Alternatives Argument: Ist allgemein (R, k) ein p-modulares System und ist D eine normale p-Untergruppe von G, so ist nicht schwer zu sehen, dass sich die einfachen $k(G/D)$ und die einfachen kG-Moduln entsprechen ([CR81, 16.17]). In unserem Fall haben wir $G = \mathrm{S}_4$ und $p = 2$. Die durch die kommutierenden Transpositionen erzeugte Untergruppe D von S_4 ist eine normale 2-Untergruppe und es ist $G/D \cong \mathrm{S}_3$. Die Gruppe S_3 hat in Charakteristik 2 genau eine eindimensionale und eine zweidimensionale irreduzible Darstellung. Damit folgt auch sofort $\chi_3^\circ = \beta_2$.

Es folgt insbesondere, dass A_4 genau einen 2-Block hat. Der Defekt dieses Blocks ist gleich 2.

Literatur

[CR81] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Methods of representation theory*, vol. 1, John Wiley & Sons, 1981.