Aufgabe 19. Bestimme die Blöcke, die Defektgruppen und die Zerlegungszahlen der Diedergruppe D_6 (Ordnung 12) für alle Primzahlen p.

1.1 Lemma. Sei $n \geq 3$ mit $n \equiv 2 \bmod (4)$. Dann ist $\mathrm{D}_n \cong \mathrm{D}_{n/2} \times \mathrm{C}_2$.

Beweis. Es ist $\mathrm{D}_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$. Wir zeigen, dass D_n das innere direkte Produkt der Untergruppen $H := \langle r^2, s \rangle \cong \mathrm{D}_{n/2}$ und $U := \langle r^{n/2} \rangle \cong \mathrm{C}_2$ ist. Da n gerade ist, gilt $\mathrm{C}_{\mathrm{D}_n}(s) = \langle s, r^{n/2} \rangle$. Folglich kommutieren H und U elementweise. Es ist $n = 4k - 2$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $\frac{n+2}{4} = k \in \mathbb{Z}$. Daher ist

$$r = r^{n+1} = r^{\frac{2n+2}{2}} = r^{\frac{n+2}{2} + \frac{n}{2}} = (r^2)^k \cdot r^{\frac{n}{2}} \in HU.$$

Offensichtlich ist $s \in HU$ und somit $HU = \mathrm{D}_n$, d.h. die Multiplikation $H \times U \to D_n$ ist surjektiv. Da beide Gruppen gleiche Ordnung haben, ist diese aber auch injektiv, d.h. es ist ein Isomorphismus und daher ist $\mathrm{D}_n = H \times U$. □

Obiges Lemma können wir für $n = 6$ anwenden und erhalten $\mathrm{D}_6 \cong \mathrm{D}_3 \times \mathrm{C}_2$. Die Coxeter-Präsentation von D_3 ist gleich der Coxeter-Präsentation von S_3, d.h. $\mathrm{D}_6 \cong \mathrm{S}_3 \times \mathrm{C}_2$. Die Darstellungstheorie der D_6 erhalten wir also aus der von S_3 und der von C_2 mit folgendem Satz:

1.2 Theorem. Seien G, H zwei endliche Gruppen und sei K ein Zerfällungskörper beider Gruppen. Für $V \in {}_{KG}\mathsf{mod}$ und $W \in {}_{KH}\mathsf{mod}$ macht man den K-Modul $V \otimes_K W$ zu einem $K(G \times H)$-Modul mittels

$$(g, h) \sum_i v_i \otimes w_i := \sum_i gv_i \otimes hw_i.$$

Man bezeichnet diesen $K(G \times H)$-Modul auch mit $V \# W$, um Missverständnisse zu vermeiden. Folgendes gilt:

(i) Die Zuordnung $\mathrm{Simp}(KG) \times \mathrm{Simp}(KH) \to \mathrm{Simp}(K(G \times H))$, $(V, W) \mapsto V \# W$, ist wohldefiniert und ist (modulo Isomorphie) eine Bijektion.

(ii) Die Abbildung $\mathrm{G}_0(KG) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{G}_0(KH) \to \mathrm{G}_0(K(G \times H))$, $[V] \otimes [W] \to [V \# W]$, ist ein Isomorphismus.

(iii) Sind $C_1, \ldots, C_n$ die Konjugiertenklassen von G und sind $C'_1, \ldots, C'_m$ die Konjugiertenklassen von H, so sind $\{C_i \times C'_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ die Konjugiertenklassen von $G \times H$ (alle paarweise verschieden, d.h. deren Anzahl ist gleich nm). Analog gilt die Aussage für p-reguläre Konjugiertenklassen mit einer Primzahl p.

(iv) Für die Darstellungen gilt $\rho_{V \# W}(g, h) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(h) \in \mathrm{End}_K(V \otimes_K W)$. Insbesondere ist $\chi_{V \# W}(g, h) = \chi_V(g) \cdot \chi_W(h)$.

(v) Sind $B_1, \ldots, B_n$ die KG-Blöcke und $B'_1, \ldots, B'_m$ die KH-Blöcke, so sind $\{B_i \times B'_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ die $K(G \times H)$-Blöcke (alle paarweise verschieden).

Weiterhin gilt für ein modulares System $(K, R, \mathfrak{m})$ mit K groß genug für $G \times H$ und Restekörper $L := R/\mathfrak{m}$:

(vi) Sei $\mathrm{d} : \mathrm{G}_0(KG) \to \mathrm{G}_0(LG)$ die Zerlegungsabbildung von G und $\mathrm{d}' : \mathrm{G}_0(KH) \to \mathrm{G}_0(LH)$ die Zerlegungsabbildung von H. Dann ist $\mathrm{d} \otimes \mathrm{d}'$ die Zerlegungsabbildung von $G \times H$.

(vii) Für $V \in {}_{LG}\mathsf{mod}$ und $W \in {}_{LH}\mathsf{mod}$ gilt $\beta_{V \# W}(g, h) = \beta_V(g) \cdot \beta_W(h)$.

(viii) Ist B ein LG-Block und B' ein LH-Block, so gilt $D_{B \times B'} = D_B \times D_{B'}$ für die Defektgruppen.

Beweis. Für (i) siehe [CR81, 10.33]. Der Rest ist nicht schwer. □

Die Charaktertafel von S_3 in Charakteristik 0 ist

$\mathbf{A} :=$

	(1)	(1,2)	(1,2,3)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	−1	1
χ_3	2	0	−1

und die Charaktertafel von $\mathrm{C}_2 = \langle \xi \rangle$ in Charakteristik 0 ist

$\mathbf{A}' :=$

	1	ξ
ψ_1	1	1
ψ_2	1	−1

Die Charaktertafel von $D_6 \cong S_6 \times C_2$ in Charakteristik 0 ist also:

$\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}' =$

	$(1)\times 1$	$(1)\times\xi$	$(1,2)\times 1$	$(1,2)\times\xi$	$(1,2,3)\times 1$	$(1,2,3)\times\xi$
$\chi_1\#\psi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_1\#\psi_2$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_2\#\psi_1$	1	1	-1	-1	1	1
$\chi_2\#\psi_2$	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_3\#\psi_1$	2	2	0	0	-1	-1
$\chi_3\#\psi_2$	2	-2	0	0	-1	1

Die für die modulare Darstellungstheorie interessanten Primzahlen sind nur die Teiler von $|D_6| = 12$, also 2 und 3; bei allen anderen passiert nichts.

$\mathbf{p = 2}$: Sei $(K, R, \mathfrak{m})$ ein 2-modulares System mit $\mathrm{Char}(K) = 0$ und K groß genug für D_6. Sei $L := R/\mathfrak{m}$ der Restekörper. Die p'-Konjugiertenklassen von S_3 sind (1) und $(1,2,3)$, d.h. es gibt zwei irreduzible L-Darstellungen. Offensichtlich ist $\beta_1 := \chi_1^\circ = \chi_2^\circ$ der Brauer-Charakter der trivialen L-Darstellung. Sei β_2 der Brauer-Charakter der anderen irreduziblen L-Darstellung. Es ist $S_3^{\mathrm{ab}} \cong C_2$ und in Charakteristik 2 hat C_2 nur eine irreduzible Darstellung. Folglich kann β_2 nicht eindimensional sein und daher ist bereits $\beta_2 = \chi_3^\circ$. Die Brauer-Charaktertafel von S_3 ist also

$\mathbf{X} :=$

	(1)	$(1,2,3)$
$\beta_1 = \chi_1^\circ$	1	1
$\beta_3 = \chi_3^\circ$	2	1

und die Zerlegungsmatrix ist

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

An der Zerlegungsmatrix sehen wir, dass es zwei RS_3-Blöcke B_1 bzw. B_2 gibt, in dem β_1 bzw. β_2 liegt. In B_2 liegt nur eine irreduzible K-Darstellung (χ_3), d.h. B_2 hat Defekt 0 und daher ist die Defektgruppe D_{B_2} trivial. Im Hauptblock B_1 liegen allerdings zwei irreduzible K-Darstellungen (χ_1 und χ_2). Die Defektgruppe D_{B_1} des Hauptblocks B_1 ist eine Sylow 2-Untergruppe von S_3 (das ist für den Hauptblock immer so), z.B. $D_{B_1} = \langle (1,2) \rangle \cong C_2$. Der Defekt von B_1 ist insbesondere gleich 1.

Wie oben bereits erwähnt hat C_2 nur eine irreduzible L-Darstellung. Die Brauer-Charaktertafel ist also

$\mathbf{X}' :=$

	1
$\gamma_1 = \psi_1^\circ$	1

und die Zerlegungsmatrix ist

$$\mathbf{D}' := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt einen RC_2-Block B'. Dies ist der Hauptblock und daher ist seine Defektgruppe eine Sylow 2-Untergruppe von C_2, d.h. $D_{B'} = C_2$. Der Defekt von B' ist insbesondere gleich 1.

Die Brauer-Charaktertafel von $D_6 \cong S_3 \times C_2$ ist also

$\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}' =$

	$(1)\times 1$	$(1,2,3)\times 1$
$\beta_1\#\gamma_1$	1	1
$\beta_2\#\gamma_1$	2	1

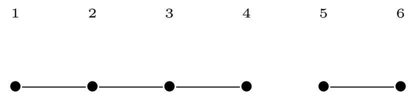
und die Zerlegungsmatrix ist

$$\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt zwei RD_6-Blöcke, nämlich $\mathbf{B}_1 := B_1 \times B'$ und $\mathbf{B}_2 := B_2 \times B'$. Die irreduzible L-Darstellung in $\mathbf{B}_1$ ist $\beta_1\#\gamma_1$ und die irreduziblen K-Darstellungen in diesem Block sind $\chi_1\#\psi_1, \chi_1\#\psi_2, \chi_2\#\psi_1, \chi_2\#\psi_2$, d.h. genau die eindimensionalen. Es ist $D_{\mathbf{B}_1} = \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$, d.h. der Defekt von $\mathbf{B}_1$ ist gleich 2. Die irreduzible L-Darstellung in $\mathbf{B}_2$ ist $\beta_2 \# \gamma_1$ und die irreduziblen K-Darstellungen in diesem Block sind $\chi_3 \# \psi_1$ und $\chi_3 \# \psi_2$. Es ist $D_{\mathbf{B}_2} = 1 \times \mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_2$, d.h. der Defekt von $\mathbf{B}_2$ ist gleich 1. Wir erhalten folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccc}
\chi_1\#\psi_1, \chi_1\#\psi_2, \chi_2\#\psi_1, \chi_2\#\psi_2 & \qquad & \chi_3\#\psi_1, \chi_3\#\psi_2 \\
| & & | \\
\beta_1\#\gamma_1 & & \beta_2\#\gamma_1 \\
 & & \\
\mathbf{B}_1 & & \mathbf{B}_2 \\
 & & \\
\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 & & \mathrm{C}_2
\end{array}$$

Der Brauer-Graph ist:



$\mathbf{p = 3}$: Sei $(K, R, \mathfrak{m})$ ein 3-modulares System mit $\mathrm{Char}(K) = 0$ und K groß genug für D_6. Sei $L := R/\mathfrak{m}$ der Restekörper. Die p'-Konjugiertenklassen von S_3 sind (1) und $(1,2)$, d.h. es gibt zwei irreduzible L-Darstellungen. Offensichtlich ist $\beta_1 := \chi_1^\circ$ der Brauer-Charakter der trivialen L-Darstellung. Da $\beta_2 := \chi_2^\circ \neq \beta_1$ und dieser eindimensional ist, muss dieser Brauer-Charakter bereits der andere irreduzible sein. Die Brauer-Charaktertafel von S_3 ist also

$\mathbf{X} :=$

	(1)	$(1,2)$
$\beta_1 = \chi_1^\circ$	1	1
$\beta_2 = \chi_2^\circ$	1	-1

und da $\chi_3^\circ = \beta_1 + \beta_2$ ist Zerlegungsmatrix

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

An der Zerlegungsmatrix sehen wir, dass es nur einen $R\mathrm{S}_3$-Block B gibt. Da dies der Hauptblock ist, ist seine Defektgruppe D_B eine Sylow 3-Untergruppe von S_3, z.B. $D_B = \mathrm{A}_3$. Der Defekt von B ist insbesondere gleich 1.

Die Gruppe C_2 hat zwei irreduzible L-Darstellung. Die Brauer-Charaktertafel ist also

$\mathbf{X}' :=$

	1	ξ
$\gamma_1 = \psi_1^\circ$	1	1
$\gamma_2 = \psi_2^\circ$	1	-1

und die Zerlegungsmatrix ist

$$\mathbf{D}' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt zwei $R\mathrm{C}_2$-Blöcke B_1' bzw. B_2', in dem γ_1 bzw. γ_2 liegt. Beide Blöcke haben offensichtlich Defekt 0 und daher ist $D_{B_1'} = 1 = D_{B_2'}$.

Die Brauer-Charaktertafel von $\mathrm{D}_6 \cong \mathrm{S}_3 \times \mathrm{C}_2$ ist also

$\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}' =$

	$(1) \times 1$	$(1) \times \xi$	$(1,2) \times 1$	$(1,2) \times \xi$
$\beta_1\#\gamma_1$	1	1	1	1
$\beta_1\#\gamma_2$	1	-1	1	-1
$\beta_2\#\gamma_1$	1	1	-1	-1
$\beta_2\#\gamma_2$	1	-1	-1	1

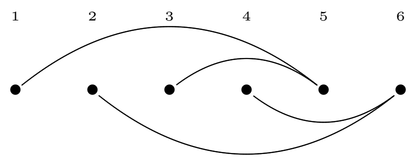
und die Zerlegungsmatrix ist

$$\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt zwei $R\mathrm{D}_6$-Blöcke, nämlich $\mathbf{B}_1 := B \times B_1'$ und $\mathbf{B}_2 := B \times B_2'$. Die irreduziblen L-Darstellungen in $\mathbf{B}_1$ sind $\beta_1\#\gamma_1, \beta_2\#\gamma_1$ und die irreduziblen K-Darstellungen in diesem Block sind $\chi_1\#\psi_1, \chi_2\#\psi_1, \chi_3\#\psi_1$. Es ist $D_{\mathbf{B}_1} = \mathrm{A}_3 \times 1 = \mathrm{A}_3$, d.h. der Defekt von $\mathbf{B}_1$ ist gleich 1. Die irreduziblen L-Darstellungen in $\mathbf{B}_2$ sin $\beta_1\#\gamma_2, \beta_2\#\gamma_2$ und die irreduziblen K-Darstellungen in diesem Block sind $\chi_1\#\psi_2, \chi_2\#\psi_2, \chi_3\#\psi_2$. Es ist $D_{\mathbf{B}_2} = \mathrm{A}_3 \times 1 = \mathrm{A}_3$, d.h. der Defekt von $\mathbf{B}_2$ ist gleich 1. Wir erhalten folgendes Bild:

$$\begin{array}{cc}
\chi_1\#\psi_1, \chi_2\#\psi_1, \chi_3\#\psi_1 & \chi_1\#\psi_2, \chi_2\#\psi_2, \chi_3\#\psi_2 \\
| & | \\
\beta_1\#\gamma_1, \beta_2\#\gamma_1 & \beta_1\#\gamma_2, \beta_2\#\gamma_2 \\
& \\
\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\
& \\
\mathrm{A}_3 & \mathrm{A}_3
\end{array}$$

Der Brauer-Graph ist:



Literatur

[CR81] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Methods of representation theory*, vol. 1, John Wiley & Sons, 1981.